

LA DÉTERMINATION DES DISTRIBUTIONS DE PARTONS (PDFs) PAR LES MÉTHODES MONTE CARLO PAR CHAÎNES DE MARKOV (MCMC)

Séminaire Doctorants 2ème année

Yémalin Gabin GBEDO

Encadrante : Mariane MANGIN-BRINET

5 Avril 2016

1 Le formalisme de la chromodynamique quantique perturbative (pQCD)

2 Le Monte Carlo par chaînes de Markov

3 Application

QCD : la théorie quantique des champs pour l'interaction forte

- Déclaration : la matière hadronique est constituée de quarks de spin 1/2 et de gluons de spin 1
- La fonction d'onde du baryon comme Δ^{++} :

$$|\Delta^{++}; +\frac{3}{2}\rangle = |u\uparrow\rangle |u\uparrow\rangle |u\uparrow\rangle$$

est interdite par le principe d'exclusion de Pauli/statistique de Fermi-Dirac.

Besoin d'un degré de liberté supplémentaire : la couleur



- Le groupe $SU(3)_c$ conduit à des hadrons “ blancs ” i.e. baryons et mésons sont des singlets de $SU(3)$
- Degrés de liberté fondamentaux : les champs de quarks et de gluons
- Le Lagrangien de la QCD : la symétrie de jauge locale $SU(3)_c$

$$\mathcal{L}_{\text{QCD}} = \underbrace{\sum_{q=u,d,s,c,b,t} \bar{q}_j (i\not{D} - m_q)_{jk} q_k - \frac{1}{4} G_{\mu\nu}^a G_a^{\mu\nu}}_{\mathcal{L}_{\text{classique}}} + \mathcal{L}_{\text{gauge-fixing}} + \mathcal{L}_{\text{ghost}} \quad (1)$$

- Paramètres libres :
 - Couplage de jauge : g_s
 - Les masses des quarks : $m_u, m_d, m_s, m_c, m_b, m_t$

- Confinement :

- Les partons (quarks et gluons) sont seulement trouvés dans les hadrons de taille $\sim 1\text{fm}$



- Hadronisation :

- Les partons produits dans les interactions de courte distance se réorganisent pour former les hadrons observés

- La liberté asymptotique :

- La constante de couplage est faible à haute énergie, i.e. courte distance : **théorie de perturbation**
- Quarks et gluons se comportent comme des particules libres à des énergies asymptotiquement hautes

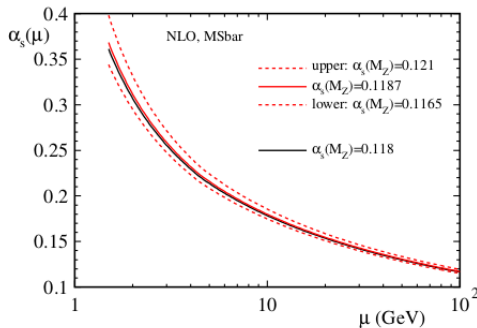
- L'exclavage IR :

- La constante de couplage est forte à basse énergie, i.e. longue distance ($\gtrsim 1\text{fm}$)
- La méthode non perturbative (e.g. **la QCD sur réseau**) doit être utilisée

Renormalisation des divergences UV :

Constante de couplage variable $a_s := \frac{\alpha_s}{4\pi}$

$$a_s(\mu) = \frac{1}{\beta_0 \ln(\frac{\mu^2}{\Lambda^2})}$$



• Gross, Wilczek ('73) ; Politzer ('73)



Théorie de jauge non Abélienne :
fonctions bêta négatives

$$\frac{da_s}{d \ln \mu^2} = -\beta_0 a_s^2 + \dots$$

où $\beta_0 = \frac{11}{3} C_A - \frac{2}{3} n_f$

⇒ liberté asymptotique : $a_s \searrow$ quand $\mu \nearrow$

• Prix Nobel 2004

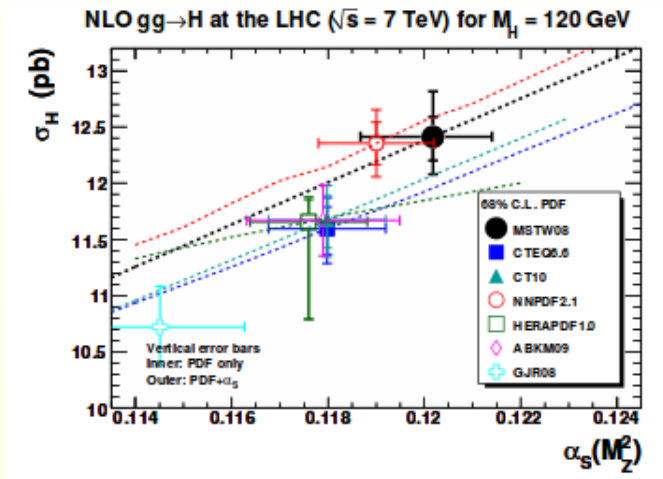
Les PDFs :

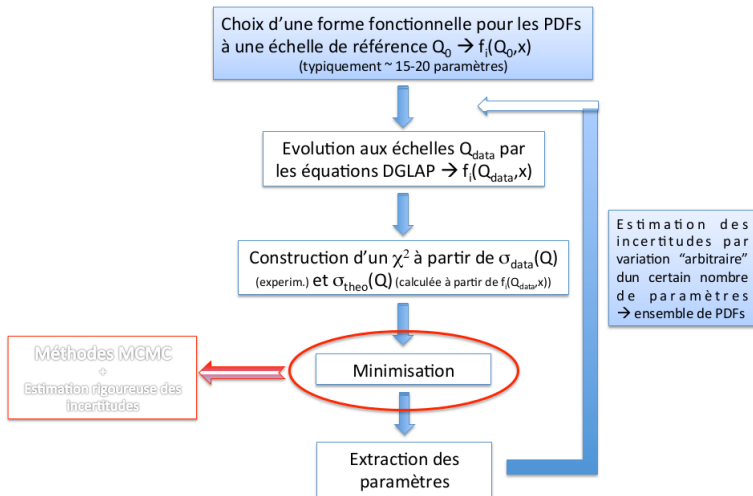
- sont universelles et encodent des informations sur la structure des hadrons
- connues sont plutôt obtenues en utilisant les données expérimentales
- peuvent être déterminées en analysant diverses données expérimentales
 - electron/muon : $e + p \rightarrow e + X$
 - muon : $\mu + p \rightarrow \mu + X$
 - Drell-Yan : $p + p \rightarrow \mu^+ \mu^- + X$
 - ...

Plusieurs ensembles de PDFs qui se distinguent par

- La méthodologie
 - MSTW, ABM, CTEQ, CT10,... : paramétrisation
 - NNPDF : réseaux de neurones (pas de paramétrisation)
- Le choix de l'ensemble de données
- Le traitement de la masse des quarks
- L'ordre de la théorie des perturbations : LO, NLO, NNLO (nous devons prendre l'ensemble de PDFs qui correspond à la précision de notre calcul)

Figure tirée de arXiv :1111.5452v4





- 1 Le formalisme de la chromodynamique quantique perturbative (pQCD)
- 2 Le Monte Carlo par chaînes de Markov
- 3 Application

- La méthode Monte Carlo par chaînes de Markov utilise une approche basée sur la marche aléatoire pour explorer un espace de paramètres de dimensionnalité arbitraire
- Le MCMC est très adapté au problème d'analyse global des PDFs parce que :
 - cela évite de se coincer dans un minimum local de l'espace de paramètres ;
 - cela permet l'incorporation dans l'espace de paramètres des informations sur le prior ;
 - cela permet aussi de trouver le meilleur ajustement dans le processus d'exploration de l'espace de paramètres et enfin
 - cela échantillonne la densité de probabilité a posteriori pour chaque paramètre, et donne donc des estimations d'incertitudes robustes.

- Supposons que nous ajustons N points de données mesurées $O_i (i = 1, \dots, N)$ à un modèle qui possède M paramètres ajustables $\Theta = \{\theta_j\}, j = 1, \dots, M$
- Faisons l'hypothèse que les données expérimentales $\{O_i\}$ sont des variables aléatoires indépendantes distribuées suivant la loi normale
- Alors la probabilité de l'ensemble des données mesurées est le produit des probabilités de chaque point,

$$\mathcal{L}(\Theta) \propto \prod_{i=1}^N \left\{ \exp \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{O_i - E_i(\Theta)}{\sigma_i} \right)^2 \right] \right\} \quad (2)$$

- Le célèbre théorème de Bayes relie la probabilité conditionnelle de A étant donné que B est vraie à celle de B étant donné que A est vraie et les probabilités individuelles de A et B :

$$P(A|B) = \frac{P(B|A) \times P(A)}{P(B)} \quad (3)$$

- Si nous souhaitons déterminer les paramètres Θ du modèle E qui ajustent le mieux les données après avoir vu les données O issues des expériences, nous pourrions réécrire ceci comme :

$$P(\Theta|O) = \frac{\mathcal{L}(\Theta) \times P(\Theta)}{P(O)}, \quad P(O|\Theta) \equiv \mathcal{L}(\Theta) \quad (4)$$

- L'approche Bayésienne ne fournit pas la loi qui établit une probabilité a priori, mais si on suppose une probabilité a priori, elle dit comment le degré de confiance doit changer face aux données expérimentales.

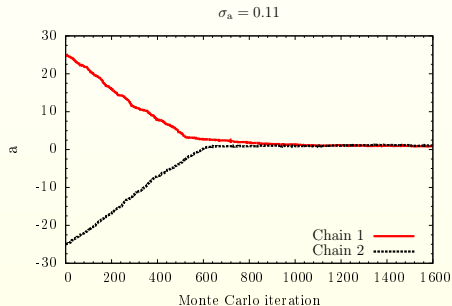
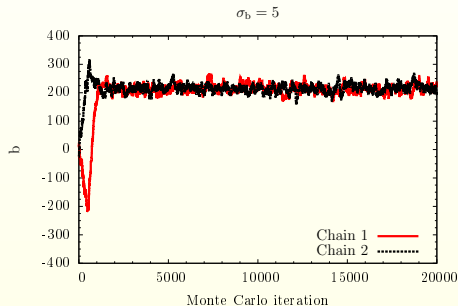
- Il existe plusieurs sortes d'algorithmes MCMC. Pour le moment, nous considérons seulement l'agorithme de MH, qui est le plus simple des algorithmes MCMC
- On sélectionne une valeur initiale pour chacun des paramètres Θ
- On s'éloigne de ces valeurs en utilisant une fonction d'échantillonnage
 - Un choix typique est de s'éloigner en utilisant une gaussienne centrée sur les états présents de chacun des paramètres Θ
 - Notons que pour une fonction d'échantillonnage gaussienne, nous aurons à choisir le "pas gaussien". Le principe de base est que le "pas gaussien" doit être choisi très prudemment afin de rendre l'algorithme efficace
 - La fonction d'échantillonnage n'a pas à être gaussienne, nous pouvons choisir n'importe quelle loi
 - Un mauvais choix de la fonction d'échantillonnage ne ruine pas la méthode, cela conduit à un échantillonneur inefficace

- On compare le rapport de la probabilité a posteriori des nouvelles valeurs des paramètres Θ_k à la probabilité a posteriori des anciennes valeurs des paramètres Θ_{k-1}

$$R_k = \frac{P(\Theta_k|O)}{P(\Theta_{k-1}|O)} \quad (5)$$

- Si $R_k > 1$ on accepte toujours les nouvelles valeurs des paramètres
- Si $R_k < 1$ on accepte les nouvelles valeurs des paramètres avec la probabilité R_k
- Les valeurs des paramètres Θ_k doivent être enregistrées. Cette série de valeurs de paramètres est appelée chaîne de Markov
- La valeur Θ_{k_0} du point k_0 de la chaîne qui maximise la probabilité a posteriori représente le modèle qui ajuste le mieux les données

- Ici j'ai utilisé l'algorithme de MH pour ajuster la droite $y = ax + b$ aux données tirées de la table 1 de [arXiv :1008.4686v1](https://arxiv.org/abs/1008.4686v1)



- 1 Le formalisme de la chromodynamique quantique perturbative (pQCD)
- 2 Le Monte Carlo par chaînes de Markov
- 3 Application

La forme fonctionnelle des PDFs dans le proton utilisée dans l'ajustement aux données expérimentales par la collaboration CTEQ est

$$xf_i^p(x, Q_0) = C_{0,i} x^{C_{1,i}} (1-x)^{C_{2,i}} e^{C_{3,i} x} (1 + e^{C_{4,i} x})^{C_{5,i}}, \quad (6)$$

pour $i = u_v, d_v, g, \bar{u} + \bar{d}, s, \bar{s}$.

- L'échelle de référence Q_0 pour laquelle ces PDFs sont définies : $Q_0 = 1.3 \text{ GeV}$
- Les données expérimentales utilisées : $Q > 2 \text{ GeV}$ et $W > 3.5 \text{ GeV}$
- Le nombre total de points de données : 1446

$$251 [F_2^d(\text{BCDMS})] + 339 [F_2^p(\text{BCDMS})] + 79 [F_2(\text{H1 96/97})] + 126 [F_2(\text{H1 98/99})] \\ + 130 [F_2(\text{H1 94/97})] + 197 [F_2(\text{ZEUS 96/97})] + 201 [F_2^p(\text{NMC})] + 123 \left[\frac{F_2^d}{F_2^p}(\text{NMC}) \right]$$

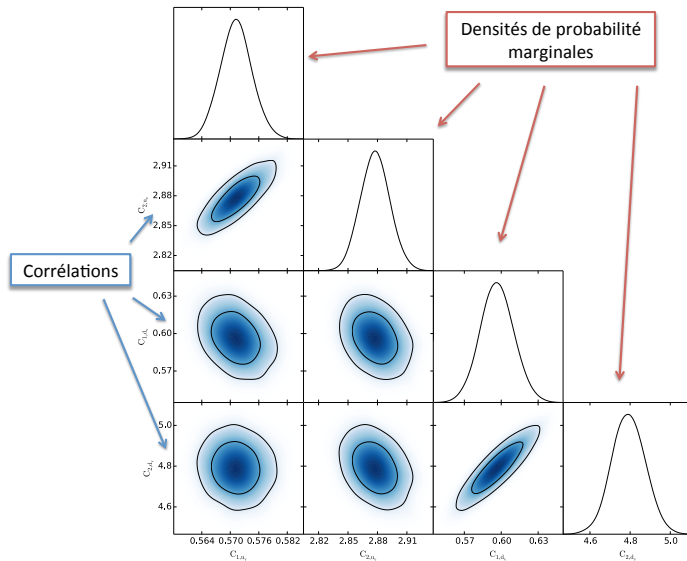
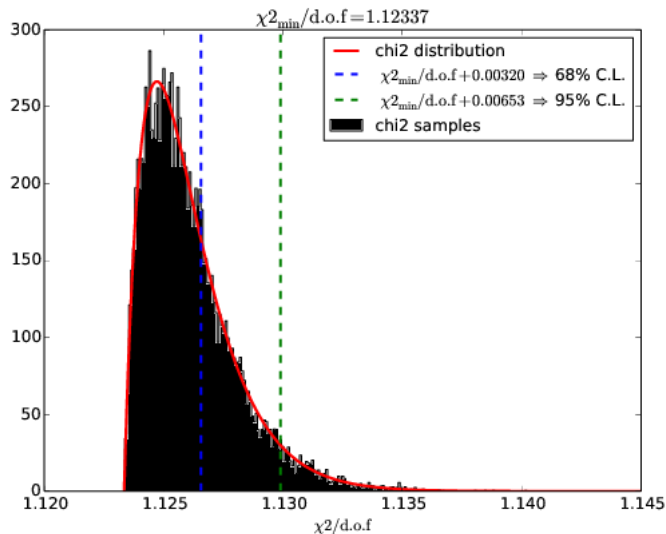


TABLE 1 – La valeur la plus probable de quatre paramètres des PDFs. Les incertitudes correspondent à 68% de l'intervalle de confiance de leurs distributions de probabilité marginalisées.

Valeur	C_{1,u_v}	C_{2,u_v}	C_{1,d_v}	C_{2,d_v}
Estimée	$0.571^{+0.003}_{-0.003}$	$2.88^{+0.02}_{-0.01}$	$0.60^{+0.01}_{-0.01}$	$4.79^{+0.08}_{-0.08}$

- L'objectif final sera d'estimer la valeur la plus probable ainsi que l'incertitude à 68% de la limite de confiance autour de cette valeur probable pour chaque distribution de partons.



Quelques “challenges” ... :

- L'algorithme est simple mais coûteux en temps de calcul : c'est pour cela que j'ai implémenté un algorithme plus puissant que MH (Hamiltonien Monte carlo) qui permet d'avoir une acceptance théorique de 100%. J'ai implémenté cet algorithme sur un cas d'école à 100 paramètres
- Reste à l'implémenter sur un cas réaliste afin de déterminer tous les paramètres libres des formes fonctionnelles de l'équation (5)

Et quelques résultats attendus ... :

- Validation de l'algorithme sur des cas physiques simples ...
- Exploitation ensuite de tout le potentiel de ces techniques en les appliquant à une très large gamme d'observables, en particulier celles mesurées au LHC (Physique du quark top, du boson de Higgs, du boson W, ...)

Merci de votre attention !