



# Anneau de stockage pour la mesure du moment électrique dipolaire du proton: effet des déflecteurs électrostatiques sur la cohérence de spin

Michaud Julien

Directeur de thèse : Jean-Marie De Conto

29 Mars 2018

## 1 La collaboration JEDI, objectifs

- Le moment électrique dipolaire : EDM
- Collaboration JEDI, description de l'expérience
- Temps de cohérence de spin, effet des champs de fuite
- Objectifs de la thèse

## 2 Modèles développés

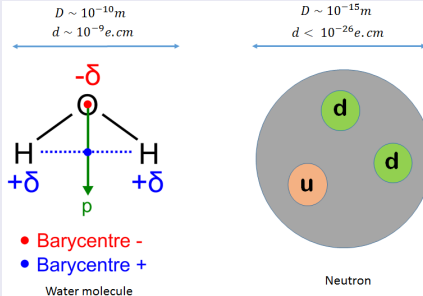
- Modélisation du champ électrostatique
- Trajectoire des particules et outils développés
- Dynamique de spin dans le déflecteur

## 3 Conclusion, perspectives, résultats

- Travail réalisé, résultats
- Travail restant

# Le moment électrique dipolaire : EDM

## L'EDM en général

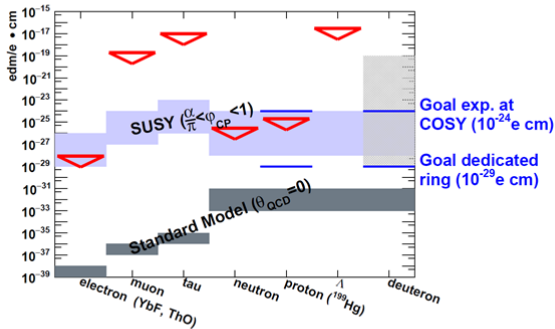


## En comparaison



# Les EDM actuellement

## EDM: Current Upper Limits



FZ Jülich: EDMs of **charged** hadrons:  $p, d, {}^3\text{He}$

# La collaboration JEDI (Jülich Electric Dipole moment Investigations)

<http://collaborations.fz-juelich.de/ikp/jedi/>

Objectif : EDM du proton (éventuellement deuton) à  $10^{-29} e.cm$   
Limite actuelle :  $d_p < 10^{-26} e.cm$

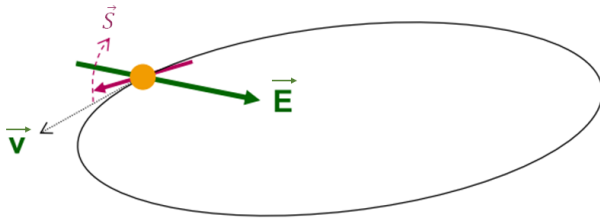


Preuve de principe :

$$\sim 10^{-24} e.cm$$

CoSy : Cooler Synchrotron

# Principe de la mesure



$\vec{E} \approx 12 \text{ MV/m}$   
 $R = 40 \text{ m}$   
Energie : 300 MeV

## Cohérence de spin

Injection de particules polarisées longitudinalement.  
Création de polarisation verticale.

⚠ Problèmes et erreurs systématiques.

## Équation de précession du spin

$$\frac{d\vec{S}}{dt} = \vec{\Omega} \times \vec{S}$$

Thomas-BMT

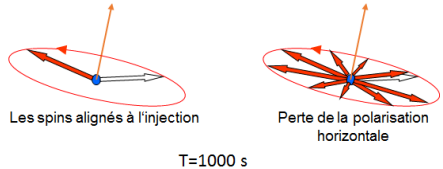
$$\vec{\Omega} = -\frac{e}{m} \left\{ G\vec{B} + \left( \frac{1}{\gamma^2 - 1} - G \right) (\vec{\beta} \times \vec{E}) + \frac{\eta}{2} (\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) \right\}$$

$$G = \frac{g-2}{2},$$

$$d = \eta e \hbar / 4mc$$

Magnetic Moment      EDM

## Cohérence de spin



## Quelques sources de décohérence

Champs magnétiques.

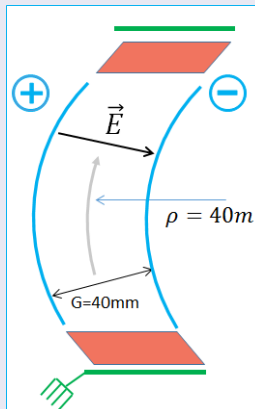
Les particules n'ont pas la même histoire.

Les champs de fuite des déflecteurs.

Quel est l'effet des champs de fuite sur la cohérence de spin ?

# Les champs de fuite du déflecteur

## Un déflecteur électrostatique



## Déflecteur électrostatique

Champ  $\vec{E}$  transverse constant.

$$\vec{E} \approx 12 \text{ MV/m.}$$

Déflexion des particules.

Création de polarisation verticale.

## Champ de fuite

Champ longitudinal

Non-linéarités supplémentaires.

Dégradation du faisceau.



Dégradation du spin.



# Objectifs, contraintes

## Objectifs

- Comprendre la dynamique de spin dans le déflecteur complet.
- Effet du champ de fuite sur la cohérence de spin.
- Optimiser différents scénarios (BMAD).

## Contraintes

- Modèle précis et bien maîtrisé (éviter calculs type Runge-Kutta).
- Rapidité de calcul ( $10^9$  particules,  $10^9$  tours, 200 éléments...).
- Possibilité d'avoir un modèle universel, paramétrable (rayon, énergie...).

## Solutions

- Modèles analytiques pour le champ électrique.
- Modèles (semi-)analytiques pour les trajectoires et le spin.
- Beaucoup de vérifications (numériques et cross-checks).

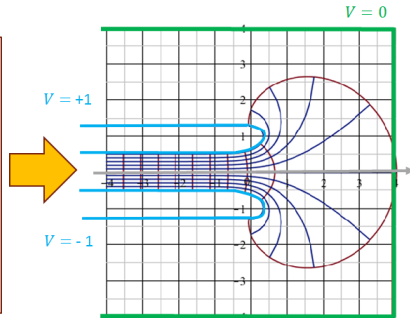
# Un modèle réaliste de champ

## Définition

Transformation analytique du plan complexe qui conserve localement les angles. Le potentiel est conservé du système initial au système final.

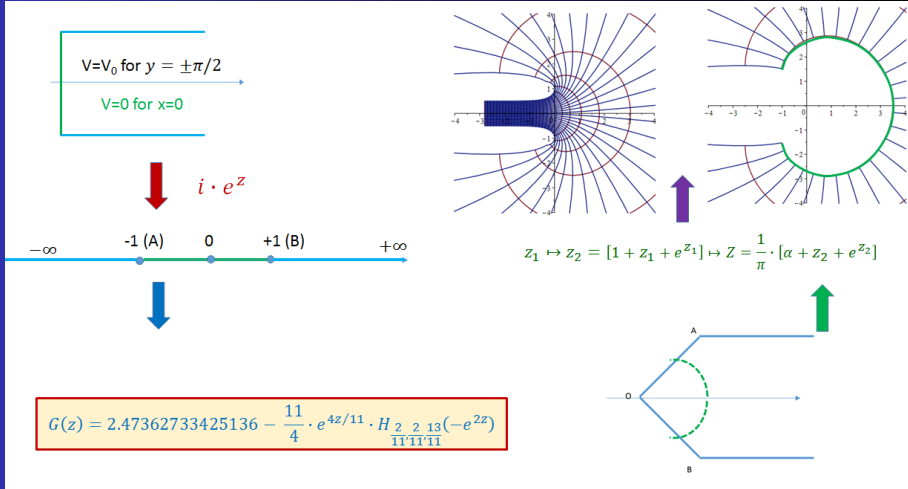


Système initial connu



Système réaliste (CL = 0)

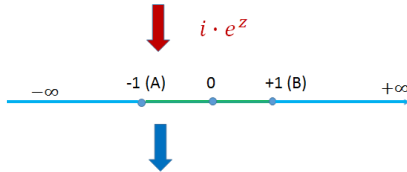
# Le problème



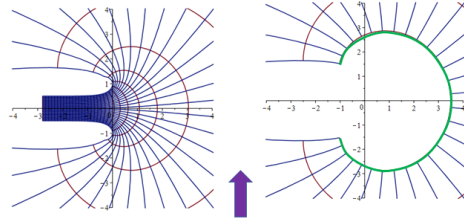
# Le problème

$$V = \frac{1}{\pi} \cdot V_0 \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{sh\left(\frac{2\omega y}{\pi}\right) \cdot \sin\left(\frac{2\omega x}{\pi}\right)}{\omega \cdot sh(\omega)} \cdot d\omega$$

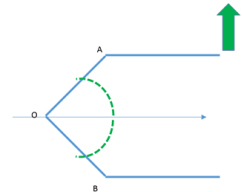
$$V = \frac{2}{\pi} \cdot V_0 \cdot \arctan[th(x) \cdot \tan(y)]$$



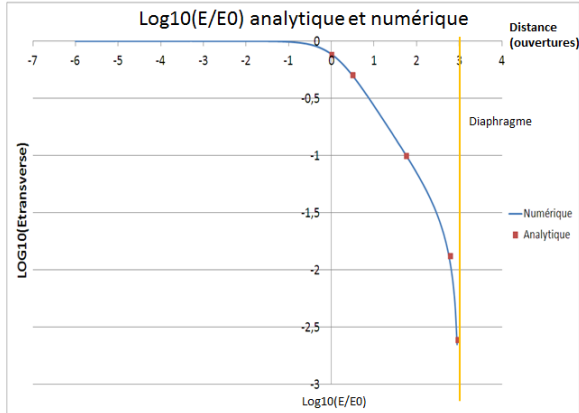
$$G(z) = 2.47362733425136 - \frac{11}{4} \cdot e^{4z/11} \cdot H_{2 \frac{2}{11} \frac{13}{11}}(-e^{2z})$$



$$z_1 \mapsto z_2 = [1 + z_1 + e^{z_1}] \mapsto Z = \frac{1}{\pi} \cdot [\alpha + z_2 + e^{z_2}]$$



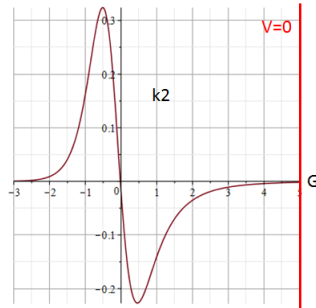
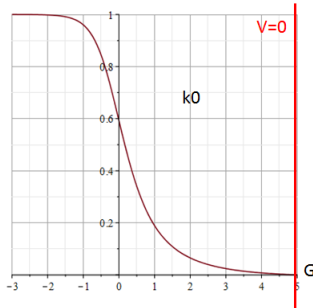
# Comparaison avec ANSYS



*Erreur relative :  $10^{-4}$  sur toute la gamme de champ*

# Composantes du potentiel électrique (universel)

$$V = E_0 \left[ k_0 \cdot \frac{G}{\rho} \cdot \tilde{x} - \frac{k_0}{2} \cdot \left( \frac{G}{\rho} \right)^2 \cdot \tilde{x}^2 + \frac{\tilde{x}^3}{3} \cdot \left( \left( \frac{G}{\rho} \right)^3 \cdot k_0 - \frac{G}{\rho} \cdot k_2 \right) \right]$$



# Outil : Méthode de résolution d'équations différentielles

## ED à résoudre

$$\dot{\vec{X}} = \frac{d\vec{X}}{dt} = A(t) \cdot \vec{X} \text{ a pour solution } \vec{X} = R \cdot \vec{X}_0$$

## Solution générale

$$\vec{X} = \exp\left(\int_0^t A(u) du\right) \triangle! \text{ ssi } A \text{ commute avec } \int A \text{ (eq 1)}$$

## Solution adaptée à un calcul perturbatif à partir de (eq 1)

$$R = I + \sum_1^{\infty} \int_0^{t_n} A(t_n) dt_n \int_0^{t_{n-1}} A(t_{n-1}) dt_{n-1} \cdots \int_0^{t_0} A(t_0) dt_0$$
$$R = I + \int A + \int A \int A + \cdots$$

# Outil : Intégration par quadrature, polynômes de Legendre

Objectif :  $x_{out} = \int_{in}^{out} F(s, x_{in}) ds$

$$P_0 = 1$$

$$P_1 = x$$

$$P_{n+1} = \frac{1}{n+1} \cdot [(2n+1) \cdot x \cdot P_n - n \cdot P_{n-1}]$$

$$\lambda_i = \frac{2}{(1 - z_i^2) \cdot P_Q'^2}$$

$$I = \int_{-1}^1 f(t) dt \sim \sum_{j=1}^Q \lambda_j \cdot f_j$$

$$P_i(z_j) = P_{ij}$$

$$A_{ij}^0 = P_{0i} \cdot [P_{0j} - P_{1j}]$$

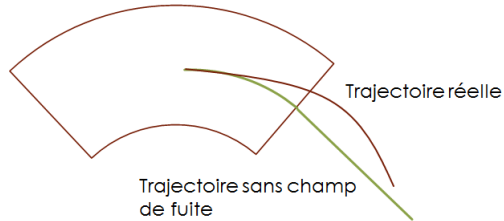
$$A_{ij}^k = P_{ki} \cdot [P_{k-1j} - P_{k+1j}] \quad (k > 0)$$

$$T_{ij} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N A_{ij}^k$$

$$J = \int_{-1}^1 \left[ g(t) \cdot \int_{-1}^t f(x) dx \right] \sim \sum_{i,j=1}^Q \lambda_i \cdot g_i \cdot T_{ij} \cdot \lambda_j \cdot f_j$$



# 1ère application : Trajectoire des particules



Trajectoire centrale  $\neq$  d'un cercle puis d'une droite

$$x'' + \frac{(k_0 + k_0^2 - 1) \cdot \gamma_0 + k_0}{\gamma_0^2} \cdot \left(\frac{G}{\rho}\right)^2 \cdot \frac{(b-a)^2}{4} = \frac{G}{\rho} [1 - k_0(1 + \alpha\delta)]$$

$$\alpha = \frac{\gamma_0^2 + 1}{\gamma_0^2}, \beta = \left(\frac{G}{\rho}\right)^2 \cdot \frac{(b-a)^2}{4}, \delta = \frac{\Delta p}{p_0} \quad [a,b]=[-3..5] \text{ for example, gap units}$$

$$\frac{d}{ds} \begin{bmatrix} x \\ x' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\omega(s) & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ x' \end{bmatrix} + \varphi$$

## 2ème application : Évolution du spin

Equation de Thomas-BMT (EDM = 0 et B = 0)

$$\frac{d\vec{S}}{dt} = \vec{\Omega} \times \vec{S} \quad \text{et} \quad \vec{\Omega} = -\frac{q}{mc^2} \cdot (G_{\text{gyr}} - \frac{1}{\gamma^2 - 1}) \cdot \vec{v} \times \vec{E}$$

Écriture plus adaptée : forme de spineurs

$$S' = \frac{F(s)}{2} \begin{bmatrix} iP_y E_x & -iP_y E_z - P_s E_x + P_x E_z \\ -iP_y E_z + P_s E_x - P_x E_z & -iP_y E_x \end{bmatrix} . S$$

Résolution perturbative

$$S' = \frac{F(s)}{2} (A_0 + E) . S = \frac{F(s)}{2} \left( \begin{bmatrix} 0 & k_0 \\ -k_0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} W_{11} & W_{12} \\ W_{21} & W_{22} \end{bmatrix} \right) . S$$

# Résultat : catalogue de formules universelles

$$S = \begin{bmatrix} T_{11}^{(1)} & T_{12}^{(1)} \\ T_{21}^{(1)} & T_{22}^{(1)} \end{bmatrix} \cdot S_0 \quad \alpha = \frac{G}{\rho} \approx 10^{-3}$$

$$\frac{dT_{11}^{(1)}}{dx_0} = -i \cdot \dot{y} \cdot \alpha^2 \cdot \left\{ -F_{00} \int Ck_0 + [F_{01} - F_{00}] \int Ck_0^2 + F_{00}^2 \int C\dot{k}_0 \cdot \int k_0 \right\}$$

$$\frac{dT_{11}^{(1)}}{dx'_0} = -i \cdot \dot{y} \cdot \alpha^2 \cdot \left\{ -F_{00} \int Sk_0 + [F_{01} - F_{00}] \int Sk_0^2 + F_{00}^2 \int S\dot{k}_0 \cdot \int k_0 \right\}$$

} Spin

Terme en  $k_2 \sim \alpha^5 \approx 10^{-15}$

Terme en  $\dot{k}_0 \sim \alpha^2 \approx 10^{-6}$

$$\iint k_0 = I_{11} = \frac{(X-a)^2}{4} \sum \lambda_i \cdot (1-z_i) \cdot k_{0i}$$

$$\iint k_0^2 = I_{12} = \frac{(X-a)^2}{4} \sum \lambda_i \cdot (1-z_i) \cdot k_{0i}^2$$

$$\iint k_0 \iint k_0 = J_{11} = \frac{1}{2} \cdot \frac{(X-a)^4}{16} \sum \lambda_i \cdot (1-z_i) \cdot k_{0i} \cdot T_{ij} \cdot (z_i - z_j) \cdot k_{0j} \cdot \lambda_j$$

} Trajectoires

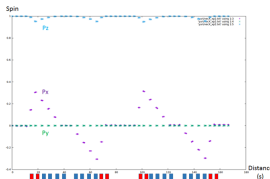
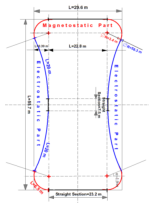
# Le code de calcul BMAD

## Un code modulable et polyvalent

Librairie de fonctions, routines, orienté objet (en fortran).  
Design de lattices, tracking de particules, spin...

## Mise en service ( plusieurs mois )

Système de conversion de lattices (MADX, OPTIM...) en BMAD.  
Échanges réguliers avec la collaboration sur l'utilisation de BMAD.  
Équations de trajectoire + spin (partiel) implémentées.



# Premiers résultats

## Partie centrale

X	Px	Y	Py	Z	$\Delta P/P$
0,001	0,001	0,001	0,001	0,001	0,001

Sx	Sy	Sz
0,000	0,000	1,000

	Sx	Sy	Sz
Ordre 0	7,8005087126732722 E-2	0	0,99695296096774355
Ordre 1	-7,8206446364958826E-002	-3,0622868358818546E-006	0,99693718545231691
Ordre 2	-7.8206446406683200E-002	-3,0625701842272038 E-6	0.99693718544904286

## Comparaison des ordres

- Ordre 0 -> Ordre 1 :  $10^{-6}$
- Ordre 1 -> Ordre 2 :  $10^{-11}$

# Résumé

## Modèles obtenus

- Modèle universel du champ de fuite.
- Fonctions de transfert univ. de trajectoires : partie centrale + champ de fuite.
- Fonction de transfert univ. de spin : partie centrale + champ de fuite.

## Remarques

- Problèmes non traités dans les codes.
- Rigueur et vérifications systématiques.

## Résultats

- Champ électrique à au moins  $10^{-4}$  relatif sur toute la plage.
- Trajectoires dans le déflecteur total.
- Transfert de spin à  $\approx 10^{-11}$  dans la partie centrale.

# Perspectives

- Finir les calculs de spin dans le champ le fuite.
- Implémenter les modèles dans BMAD.
- Appliquer ces modèles à un scénario (courant Avril, collaboration avec l'Allemagne).
- Réflexion sur des modèles analytiques simplifiés.

Merci !  
Questions ?