Gravité quantique à boucles et cosmologie primordiale : Consistance et phénoménologie

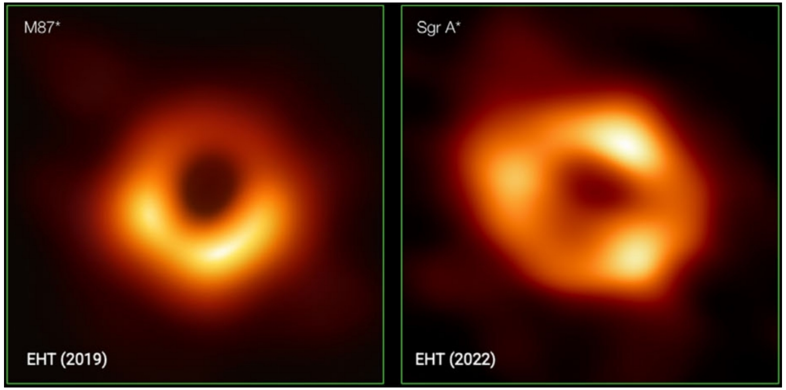
DE SOUSA Maxime

Direction : BARRAU Aurélien & MARTINEAU Killian
Groupe Phy. Théorique

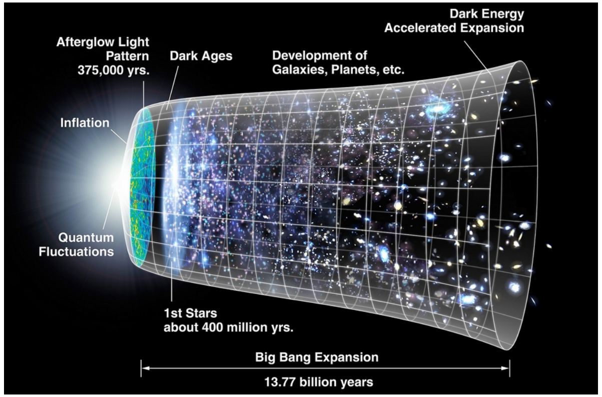
Laboratoire de Physique Subatomique & Cosmologie, Grenoble, France

Gravité quantique, pourquoi ?

▶ **Limites** de la **Relativité Générale** (RG)



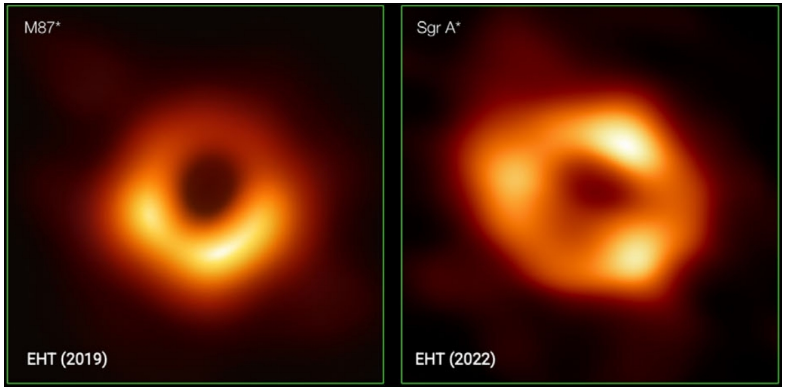
⟹ Singularité ! [Penrose, 1965]



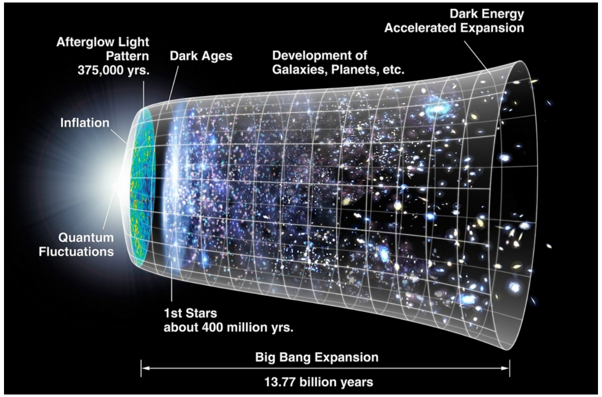
⟹ Singularité ! [Hawking, 1965-66 & Borde, Guth, Vilenkin, 2003]

Gravité quantique, pourquoi ?

▶ **Limites** de la **Relativité Générale** (RG)



$\Rightarrow$ Singularité ! [Penrose, 1965]



$\Rightarrow$ Singularité ! [Hawking, 1965-66 & Borde, Guth, Vilenkin, 2003]

▶ **Cohérence interne** de la **Relativité Générale** (RG)

Géométrie de l 'Univers
Description classique

$$G^{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} T^{\mu\nu}$$

Contenu en énergie de l'Univers
Description quantique (i.e. SM)

Équivalence ?

Gravité quantique à boucles (LQG)

Approche humble de la QG ! :)

Gravité quantique à boucles

Gravité quantique à boucles (LQG)

Approche humble de la QG ! :)

Relativité générale

$$G^{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} T^{\mu\nu}$$

- Traitement de l'espace et du temps **symétrique**

Gravité quantique à boucles

Gravité quantique à boucles (LQG)

Approche humble de la QG ! :)

Relativité générale

$$G^{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} T^{\mu\nu}$$

- Traitement de l'espace et du temps **symétrique**

Quantification « à la Dirac » (usuel en QFT)

$$\mathbf{E},\mathbf{B} \longrightarrow H = \int d\mathbf{x} \left[\frac{\epsilon_i}{2}\Pi_i(\Pi_i - \partial_i\phi) - \pi_\psi\gamma^0\gamma^i D_i\psi - im\pi_\psi\gamma^0\psi - ie\phi\pi_\psi\psi - \frac{1}{2}\Pi_i\Pi_i + \frac{\epsilon_{ijk}\epsilon_{inm}}{2}\partial_j A_k \partial_n A_m \right].$$

Espace uniquement !

Électromagnétisme classique (EM) $\longrightarrow$ Électrodynamique quantique (QED)

- Formalisme Hamiltonien : **Coordonnée de temps priviligiée**

Gravité quantique à boucles

Gravité quantique à boucles (LQG)

Approche humble de la QG ! :)

Relativité générale

$$G^{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} T^{\mu\nu}$$

▶ Traitement de l'espace et du temps **symétrique**

$\Rightarrow$ **Incohérences conceptuelles ...?**

Sans parler de l'invariance de fond...

$$\mathbf{kx} = \underline{\underline{\eta_{\mu\nu}}} k^\mu x^\nu$$

Quantification « à la Dirac » (usuel en QFT)

$$\mathbf{E}, \mathbf{B} \longrightarrow H = \int \underline{d\mathbf{x}} \Big[\tfrac{\epsilon_i}{2} \Pi_i (\Pi_i - \partial_i \phi) - \pi_\psi \gamma^0 \gamma^i D_i \psi - im\pi_\psi \gamma^0 \psi - ie\phi \pi_\psi \psi - \tfrac{1}{2} \Pi_i \Pi_i + \tfrac{\epsilon_{ijk}\epsilon_{inm}}{2} \partial_j A_k \partial_n A_m \Big].$$

Espace uniquement !

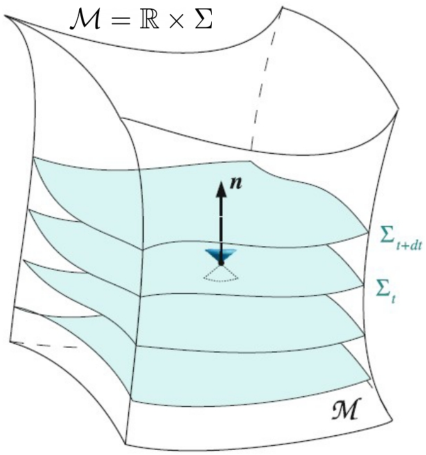
Électromagnétisme classique (EM) $\longrightarrow$ Électrodynamique quantique (QED)

▶ Formalisme Hamiltonien : **Coordonnée de temps priviligiée**

Einstein's great achievement was to show that each individual solution of the equations of motion that constitute the laws of nature exhibits four-dimensional symmetry. However, we now know that a physical state does not correspond to an individual solution of the equations of motion, but to a family of solutions all related to the same Hamilton's principal function—it is such a family that corresponds to a wave function in the quantum theory, while the individual solution has no quantum analogue. For dealing with the family one must use Hamiltonian methods. The present paper shows that Hamiltonian methods, if expressed in their simplest form, *force one to abandon the four-dimensional symmetry.*

[Dirac, 1958]

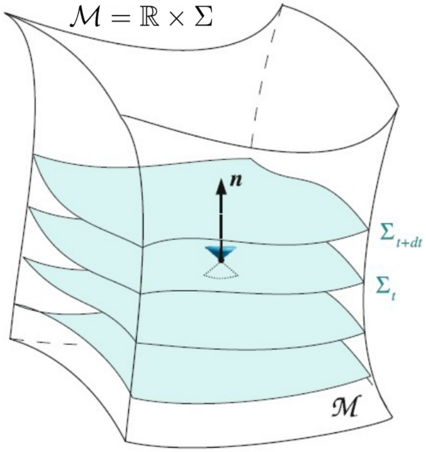
Gravité quantique à boucles



[Image arXiv:2204.03537]

- **Foliation de l'Espace-Temps** en Espace + Temps : $\mathcal{M} = \mathbb{R} \times \Sigma$

Gravité quantique à boucles



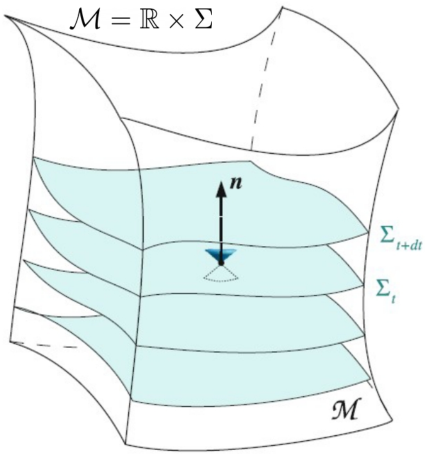
[Image arXiv:2204.03537]

- **Foliation de l'Espace-Temps** en Espace + Temps : $\mathcal{M} = \mathbb{R} \times \Sigma$
- **Procédure de Quantification canonique :**

[Ashtekar, 1986]

1. Choix des variables **canoni**ques de la GR : $\{h_{ab}, K^{cd}\} \Leftrightarrow \{A_a^i(\mathbf{x}), E_j^b(\mathbf{y})\} = \gamma\kappa\delta_a^b\delta_j^i\delta(\mathbf{x}-\mathbf{y})$
2. Promotion des variables au rang d'opérateur : $A_a^i(\mathbf{x}) \to \hat{A}_a^i(\mathbf{x}) \quad \text{et} \quad E_j^b(\mathbf{y}) \to \hat{E}_j^b(\mathbf{y})$
3. Relation de commutation : $\{\cdot,\cdot\} \to (i\hbar)^{-1}[\cdot,\cdot]$

Gravité quantique à boucles



[Image arXiv:2204.03537]

- **Foliation de l'Espace-Temps** en Espace + Temps : $\mathcal{M} = \mathbb{R} \times \Sigma$
- **Procédure de Quantification canonique :**

[Ashtekar, 1986]

1. Choix des variables **canoniques** de la GR : $\{h_{ab}, K^{cd}\} \Leftrightarrow \{A_a^i(\mathbf{x}), E_j^b(\mathbf{y})\} = \gamma\kappa\delta_a^b\delta_j^i\delta(\mathbf{x}-\mathbf{y})$
2. Promotion des variables au rang d'opérateur : $A_a^i(\mathbf{x}) \rightarrow \hat{A}_a^i(\mathbf{x}) \quad \text{et} \quad E_j^b(\mathbf{y}) \rightarrow \hat{E}_j^b(\mathbf{y})$
3. Relation de commutation : $\{\cdot,\cdot\} \rightarrow (i\hbar)^{-1}[\cdot,\cdot]$

- **Obtention de l'Hamiltonien de la théorie :**

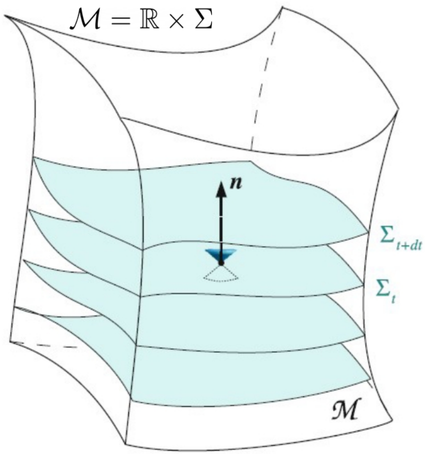
$$\hat{\mathbb{H}}(A,E) = (2\kappa)^{-1}\int_{\Sigma_t} d\mathbf{x}\left[\Lambda^i\hat{\mathcal{G}}_i + N^a\hat{\mathcal{D}}_a + N\hat{\mathcal{H}}\right] \approx 0$$

Contraintes

> It would be permissible to look upon the Hamiltonian form as the fundamental one, and there would then be no fundamental four-dimensional symmetry in the theory. One would have a Hamiltonian built up from four weekly vanishing functions, given by (40) and (41). The usual requirement of four-dimensional symmetry in physical laws would then get replaced by the requirement that the functions have weakly vanishing P.b.'s, so that they can be provided with arbitrary coefficients in the equations of motion, corresponding to an arbitrary motion of the surface on which the state is defined.

[Dirac, 1958]

Gravité quantique à boucles



[Image arXiv:2204.03537]

- **Foliation de l'Espace-Temps** en Espace + Temps : $\mathcal{M} = \mathbb{R} \times \Sigma$

- **Procédure de Quantification canonique :**

  [Ashtekar, 1986]

  1. Choix des variables **canoni**ques de la GR : $\{h_{ab}, K^{cd}\} \Leftrightarrow \{A^i_a(\mathbf{x}), E^b_j(\mathbf{y})\} = \gamma\kappa\delta^b_a\delta^i_j\delta(\mathbf{x}-\mathbf{y})$
  2. Promotion des variables au rang d'opérateur : $A^i_a(\mathbf{x}) \to \hat{A}^i_a(\mathbf{x}) \quad \text{et} \quad E^b_j(\mathbf{y}) \to \hat{E}^b_j(\mathbf{y})$
  3. Relation de commutation : $\{\cdot,\cdot\} \to (i\hbar)^{-1}[\cdot,\cdot]$

- **Obtention de l'Hamiltonien de la théorie :** $\hat{\mathbb{H}}(A,E) = (2\kappa)^{-1}\int_{\Sigma_t} d\mathbf{x}\left[\Lambda^i\hat{\mathcal{G}}_i + N^a\hat{\mathcal{D}}_a + N\hat{\mathcal{H}}\right] \approx 0$

  Contraintes

> It would be permissible to look upon the Hamiltonian form as the fundamental one, and there would then be no fundamental four-dimensional symmetry in the theory. One would have a Hamiltonian built up from four weekly vanishing functions, given by (40) and (41). The usual requirement of four-dimensional symmetry in physical laws would then get replaced by the requirement that the functions have weakly vanishing P.b.'s, so that they can be provided with arbitrary coefficients in the equations of motion, corresponding to an arbitrary motion of the surface on which the state is defined.

[Dirac, 1958]

- **Implications sur la structure de l'Espace-Temps ?**

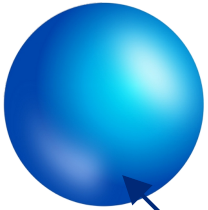
  [Rovelli, Smolin, 1995]

  $$\mathfrak{A}(\Sigma) \propto \gamma\kappa\hbar G \sum_{j\in\mathbb{N}/2} j(j-1) \implies$$ **Discrétisation de l'ET !**

Cosmologie primordiale, loop quantum cosmology

▶ Prise en compte de la **structure discrète de l'Espace-Temps** ?

1 Corrections d'holonomie

 -  $\neq 0 \quad \Leftrightarrow$

Patchs discrets

Surface continue (i.e. lisse)

Th. d'Ambrose-Singer

« L'integrale de la courbure = Holonomie chemin infinitésimal »

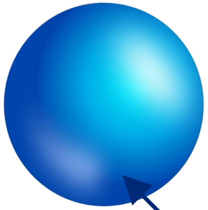
$$\int_{\mathcal{I}_1^2} \pi^{-1}_{(s,t)} \Omega \hat{\pi}_{(s,t)} = P_\gamma - \mathbb{I}_d$$

Cosmologie primordiale, loop quantum cosmology

- Prise en compte de la **structure discrète de l'Espace-Temps** ?

1 Corrections d'holonomie

$-$



$\neq 0 \quad \Leftrightarrow$

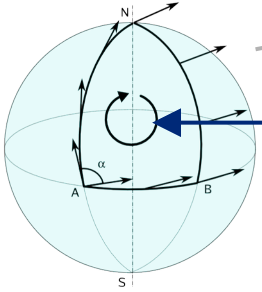
Patchs discrets

Surface continue (i.e. lisse)

Th. d'Ambrose-Singer

« L'integrale de la courbure = Holonomie chemin infinitésimal »

$$\int_{\mathcal{I}_1^2} \pi^{-1}_{(s,t)} \Omega \hat{\pi}_{(s,t)} = \boxed{P_\gamma - \mathbb{I}_d}$$



« Infinitésimal »
Surface doit tendre a zéro
MAIS **limite fondamentale** !

$\Longrightarrow$

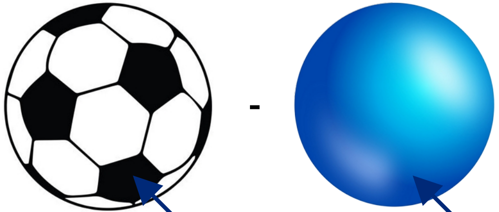
Correction d'holonomie

$$\mathfrak{c} \longrightarrow \frac{\sin(\mathfrak{c}, \mathfrak{p})}{\bar{\mu}(\mathfrak{p})}$$

Cosmologie primordiale, loop quantum cosmology

▶ Prise en compte de la **structure discrète de l'Espace-Temps** ?

① Corrections d'holonomie



$\neq 0 \quad \Leftrightarrow$

Patchs discrets

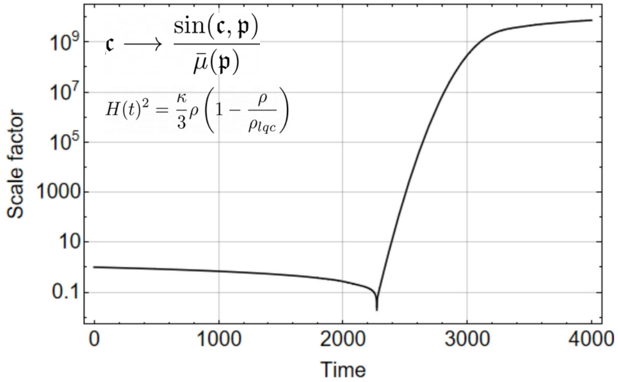
Surface continue (i.e. lisse)

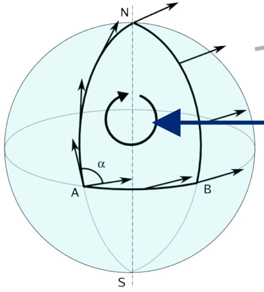
Th. d'Ambrose-Singer

« L'integrale de la courbure = Holonomie chemin infinitésimal »

$$\int_{\mathcal{I}_1^2} \pi^{-1}_{(s,t)} \Omega \hat{\pi}_{(s,t)} = \boxed{P_\gamma - \mathbb{I}_d}$$

Distance typique entre deux points de l'Univers





« Infinitésimal »
Surface doit tendre a zéro
MAIS **limite fondamentale** !

$\Rightarrow$

Correction d'holonomie

$$\mathfrak{c} \longrightarrow \frac{\sin(\mathfrak{c}, \mathfrak{p})}{\bar{\mu}(\mathfrak{p})}$$

$\Rightarrow$

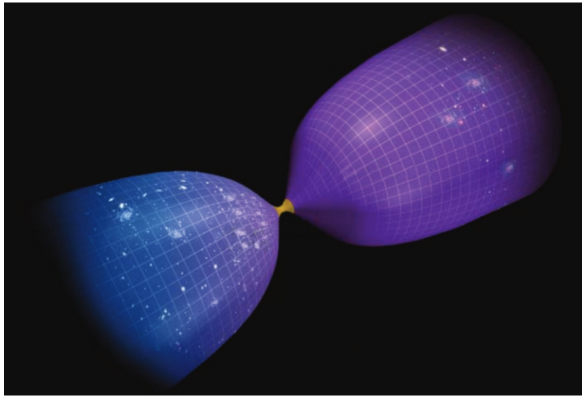
$\kappa = 8\pi G$

Correction quantique !

$$H^2 = \frac{\kappa}{3}\rho \boxed{\left(1 - \frac{\rho}{\rho_{\mathrm{LQC}}}\right)}$$

Résolution de la singularité !

Vue d'artiste d'un modèle d'Univers a rebond



Cosmologie primordiale, loop quantum cosmology

- Prise en compte de la **structure discrète de l'Espace-Temps** ?

  1. **Corrections d'holonomie (généralisées)**

Correction d'holonomie **usuelle**

$$\mathfrak{c} \longrightarrow \frac{\sin(\mathfrak{c}, \mathfrak{p})}{\bar{\mu}(\mathfrak{p})}$$

Nombreuses ambiguités de construction...
Générique possible ?

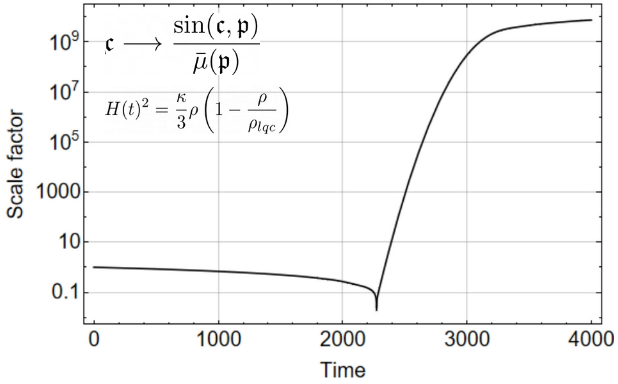
$$\Rightarrow \quad \mathfrak{c} \longrightarrow f(\mathfrak{c}/\sqrt{\mathfrak{p}})$$

[Han, Liu, 2019]

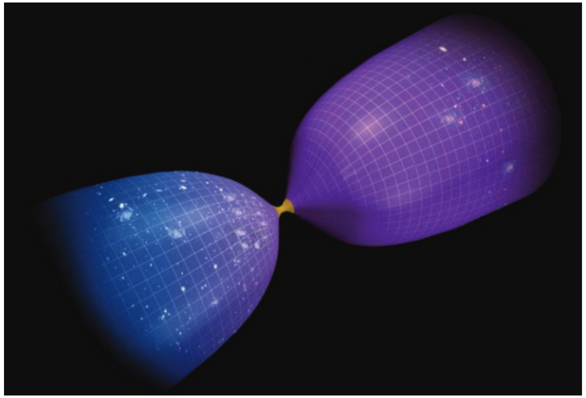
$$\Rightarrow \quad H^2 = \frac{\kappa}{3}\rho\left[f'\left(f^{-1}\left(\sqrt{\frac{\rho}{\rho_c}}\right)\right)\right]^2$$

[Amadei, Perez, Ribisi, 2022]

Distance typique entre deux points de l'Univers



Vue d'artiste d'un modèle d'Univers a rebond



Cosmologie primordiale, loop quantum cosmology

▶ Prise en compte de la **structure discrète de l'Espace-Temps** ?

1 Corrections d'holonomie (généralisées)

Correction d'holonomie **usuelle**

$$\mathfrak{c} \longrightarrow \frac{\sin(\mathfrak{c}, \mathfrak{p})}{\bar{\mu}(\mathfrak{p})}$$

Nombreuses ambiguités de construction…
Générique possible ?

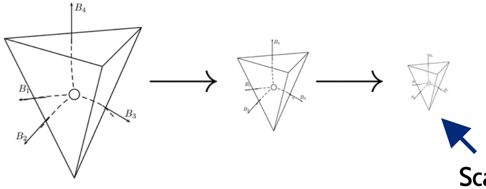
$$\Rightarrow \quad \mathfrak{c} \longrightarrow f(\mathfrak{c}/\sqrt{\mathfrak{p}})$$

[Han, Liu, 2019]

$$\Rightarrow \quad H^2 = \frac{\kappa}{3}\rho\left[f'\left(f^{-1}\left(\sqrt{\frac{\rho}{\rho_c}}\right)\right)\right]^2$$

[Amadei, Perez, Ribisi, 2022]

2 Corrections d'inverse-volume



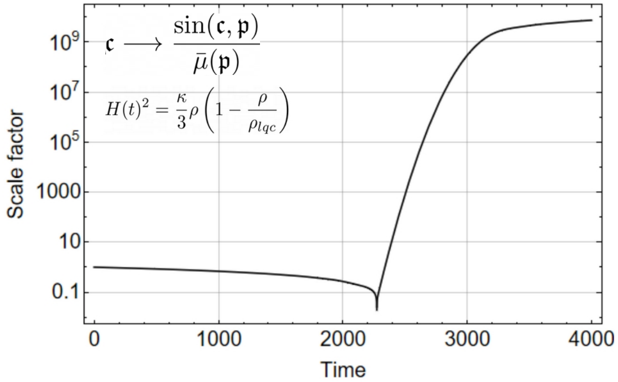
Scaling discret, limite fondamentale

[Bojowald, Hossain, Kagan, Shankaranarayanan, 2009]

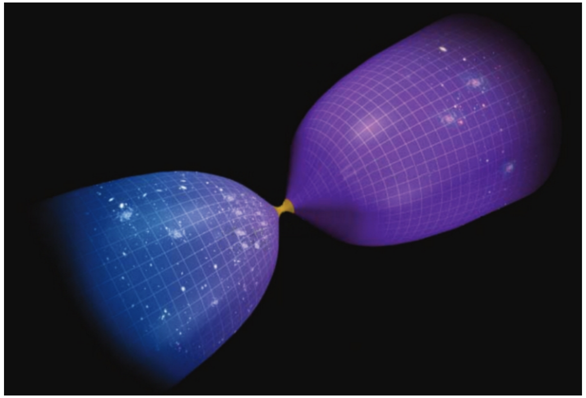
$$\Rightarrow \quad \frac{1}{\sqrt{|\det E|}} \longrightarrow \frac{\alpha(E)}{\sqrt{|\det E|}}$$

$\det|E| \Leftrightarrow$ Volume

Distance typique entre deux points de l'Univers



Vue d'artiste d'un modèle d'Univers a rebond



Cosmologie primordiale, loop quantum cosmology

Théorie

$$\mathbb{G}[\Lambda^i] = (\kappa\gamma)^{-1} \int d\mathbf{x}\, \Lambda^i \mathcal{G}_i = (\kappa\gamma)^{-1} \int d\mathbf{x}\, \Lambda^i \left[\partial_a E^a_i + \epsilon_{ik}^{\;\;l} A^k_a E^a_l\right]$$

$$\mathbb{H}_{\mathfrak{g}}[N] = (2\kappa)^{-1} \int d\mathbf{x}\, N\mathcal{H} = (2\kappa)^{-1} \int d\mathbf{x}\, N \frac{E^c_j E^d_k}{\sqrt{|\det E|}} \left[\epsilon_i^{jk} F^i_{cd} - 2\left(1+\gamma^2\right) K^j_{[c} K^k_{d]}\right]$$

$$\mathbb{D}_{\mathfrak{g}}[N^a] = (\kappa\gamma)^{-1} \int d\mathbf{x}\, N^a \mathcal{D}_a = (\kappa\gamma)^{-1} \int d\mathbf{x} \left[\left(\partial_a A^j_b - \partial_b A^j_a\right) E^b_j + A^j_a \partial_b E^b_j\right]$$

$$\frac{1}{\sqrt{|\det E|}} \longrightarrow \frac{\alpha(E)}{\sqrt{|\det E|}} \qquad \mathfrak{c} \longrightarrow g(\mathfrak{c}, \mathfrak{p}) = \bar{\mu}^{-1}(\mathfrak{p}) f(\mathfrak{c}/\sqrt{\mathfrak{p}})$$

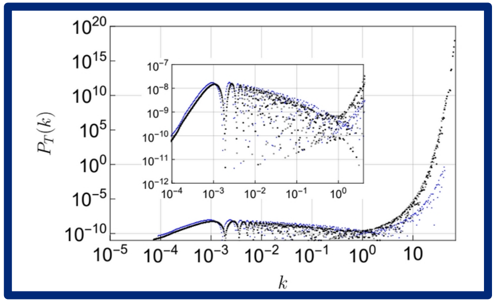
$$\{\mathcal{C}_i, \mathcal{C}_j\} = f^k_{ij}(E, A)\mathcal{C}_k + \mathcal{A}_{ij}$$

Il est là l'objectif de ma thèse !

prédit

restreint

Spectre de puissance primordial



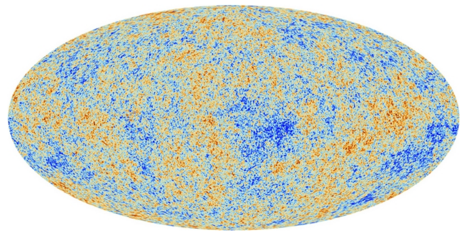
[MDS, Martineau, Renevey, Barrau 2023]

[Lewis, Challinor] ?

s'extrapole

restreint

Spectre de puissance CMB



[Collab. Planck, 2018]

Cosmologie primordiale, loop quantum cosmology

Théorie

$$\mathbb{G}[\Lambda^i] = (\kappa\gamma)^{-1} \int d\mathbf{x}\, \Lambda^i \mathcal{G}_i = (\kappa\gamma)^{-1} \int d\mathbf{x}\, \Lambda^i \left[\partial_a E^a_i + \epsilon^{\ l}_{ik} A^k_a E^a_l\right]$$

$$\mathbb{H}_{\mathfrak{g}}[N] = (2\kappa)^{-1} \int d\mathbf{x}\, N\mathcal{H} = (2\kappa)^{-1} \int d\mathbf{x}\, N \frac{E^c_j E^d_k}{\sqrt{|\det E|}} \left[\epsilon^{jk}_i F^i_{cd} - 2\left(1+\gamma^2\right) K^j_{[c} K^k_{d]}\right]$$

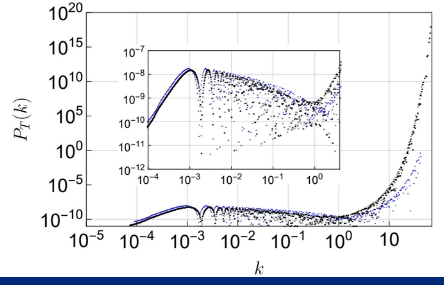
$$\mathbb{D}_{\mathfrak{g}}[N^a] = (\kappa\gamma)^{-1} \int d\mathbf{x}\, N^a \mathcal{D}_a = (\kappa\gamma)^{-1} \int d\mathbf{x} \left[\left(\partial_a A^j_b - \partial_b A^j_a\right) E^b_j + A^j_a \partial_b E^b_j\right]$$

$$\frac{1}{\sqrt{|\det E|}} \longrightarrow \frac{\alpha(E)}{\sqrt{|\det E|}} \qquad \mathfrak{c} \longrightarrow g(\mathfrak{c},\mathfrak{p}) = \bar{\mu}^{-1}(\mathfrak{p}) f(\mathfrak{c}/\sqrt{\mathfrak{p}})$$

$$\{\mathcal{C}_i, \mathcal{C}_j\} = f^k_{ij}(E, A)\mathcal{C}_k + \mathcal{A}_{ij}$$

prédit → ← **restreint**

Spectre de puissance primordial

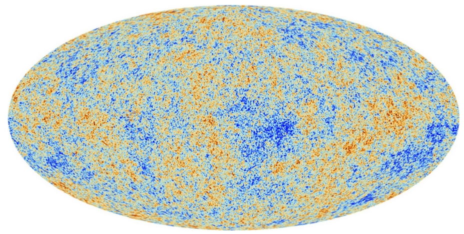


[MDS, Martineau, Renevey, Barrau 2023]

[Lewis, Challinor] ?

s'extrapole → ← **restreint**

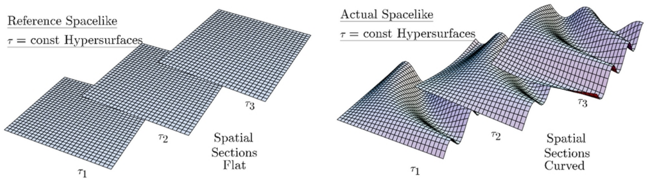
Spectre de puissance CMB



[Collab. Planck, 2018]

Comment ?

Théorie des perturbations cosmologiques



[Image Kolb, 1999]

en cosmologie standard, eq. Einstein,

$$G^{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} T^{\mu\nu}$$

perturbations,

$$G^{\mu\nu}_{\mathrm{FLRW}} + \delta G^{\mu\nu} \Leftrightarrow T^{\mu\nu}_{\phi} + \delta T^{\mu\nu}$$

$$\Rightarrow$$

[Bardeen, 1980, Kodama, Sasaki, 1984, Mukhanov, 1988]

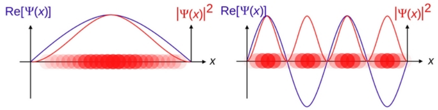
Équation de Mukhanov-Sasaki

$$v''_{s/t} - \left(\nabla^2 - \frac{z''_{s/t}}{z_{s/t}}\right) v_{s/t} = 0$$

Peut-on dériver Mukhanov-Sasaki pour notre théorie cosmologique corrigée ?

Contraintes et leur algèbre

[Image lectures McCarthy, 2020]



$\psi(x) = |\psi(x)| \exp(i\phi(x))$

Tr. de Jauge : $\phi(x) \to \phi(x) + \alpha$

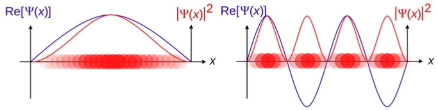
- **Théorie de Jauge** $=$ Théories pour lesquelles les variables dynamiques sont specifiées selon un **réferentiel arbitraire** en tout temps

Pour les copains de la théorie... (cc Rémy)

$\Rightarrow$ **Toutes** les th. de jauge sont un **système contraint** sous la forme canonique ! (car $\det\left(\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^m \partial \dot{q}^n}\right) = 0$)

Contraintes et leur algèbre

[Image lectures McCarthy, 2020]



$\psi(x) = |\psi(x)| \exp(i\phi(x))$

Tr. de Jauge : $\phi(x) \to \phi(x) + \alpha$

Pour les copains de la théorie... (cc Rémy)

▶ **Théorie de Jauge** $=$ Théories pour lesquelles les variables dynamiques sont specifiées selon un **réferentiel arbitraire** en tout temps

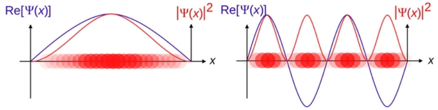
$\Longrightarrow$ **Toutes** les th. de jauge sont un **système contraint** sous la forme canonique ! (car $\det\left(\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^m \partial \dot{q}^n}\right) = 0$)

Conjecture de Dirac : Soit une théorie de jauge dans le formalisme canonique, alors les contraintes peuvent génerer des transformations qui associent à un état, un nouvel état équivalent. -- **Transformation de jauge**

[Dirac, 1959]

Contraintes et leur algèbre

[Image lectures McCarthy, 2020]



$\psi(x) = |\psi(x)|\exp(i\phi(x))$

Tr. de Jauge : $\phi(x) \to \phi(x) + \alpha$

▶ **Théorie de Jauge** $=$ Théories pour lesquelles les variables dynamiques sont specifiées selon un **réferentiel arbitraire** en tout temps

Pour les copains de la théorie... (cc Rémy)

$\Longrightarrow$ **Toutes** les th. de jauge sont un **système contraint** sous la forme canonique ! (car $\det\left(\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^m \partial \dot{q}^n}\right) = 0$)

> **Conjecture de Dirac :** Soit une théorie de jauge dans le formalisme canonique, alors les contraintes peuvent génerer des transformations qui associent à un état, un nouvel état équivalent. -- **Transformation de jauge**

[Dirac, 1959]

▶ **Contraintes de Diffeomorphisme** : Déplacement sur une hypersurface spatiale

$$\mathbb{D}_{\mathfrak{g}}[N^a] = (\kappa\gamma)^{-1}\int \mathrm{d}\mathbf{x}\, N^a \mathcal{D}_a = (\kappa\gamma)^{-1}\int \mathrm{d}\mathbf{x}\left[\left(\partial_a A_b^j - \partial_b A_a^j\right) E_j^b + A_a^j \partial_b E_j^b\right]$$

▶ **Contraintes Hamiltonienne** : Évolution temporelle

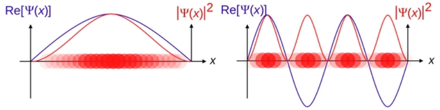
$$\mathbb{H}_{\mathfrak{g}}[N] = (2\kappa)^{-1}\int \mathrm{d}\mathbf{x}\, N\mathcal{H} = (2\kappa)^{-1}\int \mathrm{d}\mathbf{x}\, N \frac{E_j^c E_k^d}{\sqrt{|\det E|}}\left[\epsilon_i^{jk} F_{cd}^i - 2\left(1+\gamma^2\right) K_{[c}^j K_{d]}^k\right]$$

▶ **Contraintes de Gauss** : Rotations interne

$$\mathbb{G}[\Lambda^i] = (\kappa\gamma)^{-1}\int \mathrm{d}\mathbf{x}\, \Lambda^i \mathcal{G}_i = (\kappa\gamma)^{-1}\int \mathrm{d}\mathbf{x}\, \Lambda^i\left[\partial_a E_i^a + \epsilon_{ik}^l A_a^k E_l^a\right]$$

Contraintes et leur algèbre

[Image lectures McCarthy, 2020]



$\psi(x) = |\psi(x)| \exp(i\phi(x))$

Tr. de Jauge : $\phi(x) \to \phi(x) + \alpha$

▶ **Théorie de Jauge** $=$ Théories pour lesquelles les variables dynamiques sont specifiées selon un **réferentiel arbitraire** en tout temps

Pour les copains de la théorie... (cc Rémy)

$\Rightarrow$ **Toutes** les th. de jauge sont un **système contraint** sous la forme canonique ! (car $\det\left(\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^m \partial \dot{q}^n}\right) = 0$)

Conjecture de Dirac : Soit une théorie de jauge dans le formalisme canonique, alors les contraintes peuvent génerer des transformations qui associent à un état, un nouvel état équivalent. -- **Transformation de jauge**

[Dirac, 1959]

▶ **Contraintes de Diffeomorphisme** : Déplacement sur une hypersurface spatiale

$$\mathbb{D}_{\mathfrak{g}}[N^a] = (\kappa\gamma)^{-1} \int d\mathbf{x}\, N^a \mathcal{D}_a = (\kappa\gamma)^{-1} \int d\mathbf{x} \left[\left(\partial_a A_b^j - \partial_b A_a^j\right) E_j^b + A_a^j \partial_b E_j^b\right]$$

▶ **Contraintes Hamiltonienne** : Évolution temporelle

$$\mathbb{H}_{\mathfrak{g}}[N] = (2\kappa)^{-1} \int d\mathbf{x}\, N\mathcal{H} = (2\kappa)^{-1} \int d\mathbf{x}\, N \frac{E_j^c E_k^d}{\sqrt{|\det E|}} \left[\epsilon_i^{jk} F_{cd}^i - 2\left(1+\gamma^2\right) K_{[c}^j K_{d]}^k\right]$$

▶ **Contraintes de Gauss** : Rotations interne

$$\mathbb{G}[\Lambda^i] = (\kappa\gamma)^{-1} \int d\mathbf{x}\, \Lambda^i \mathcal{G}_i = (\kappa\gamma)^{-1} \int d\mathbf{x}\, \Lambda^i \left[\partial_a E_i^a + \epsilon_{ik}^{l} A_a^k E_l^a\right]$$

$\mathbb{H}(E, A) \approx 0$

$\Rightarrow$

C'est l'objet au centre de ma thèse ! ... mais celui-ci il est mignon...

Algèbre des contraintes

$$\{\mathcal{C}_i, \mathcal{C}_j\} = f_{ij}^k(E, A)\mathcal{C}_k$$

1. Contraint les solutions physiques
2. Génèrent les transformations sur les fonctions de l'espace des phases
3. Encode la structure de l'espace-temps

Vers une theorie consistante ?

- **Corrections** quantiques (GHC/IV) brisent la **cohérence de la théorie** !

$$\{\mathcal{C}_i, \mathcal{C}_j\} = f_{ij}^k(E, A)\mathcal{C}_k + \mathcal{A}_{ij}$$

Anomalies

moins mignon d'un coup...

$$
\begin{aligned}
&\{H_{tot}[N], D_{tot}[N^a]\}\\
&= -H_{tot}[\delta N^a \partial_a \delta N] + \int_\Sigma d^3x \frac{\sqrt{\bar{p}}}{\kappa}(\delta N^a \partial_a \delta N)\mathcal{A}_1\\
&+ \int_\Sigma d^3x \frac{\sqrt{\bar{p}}}{\kappa}\bar{N}\delta N^c \partial_c(\delta_i^a \delta K_a^i)\mathcal{A}_2 + \int_\Sigma d^3x \frac{\sqrt{\bar{p}}}{\kappa}\bar{N}(\delta N^a \partial_i \delta K_a^i)\mathcal{A}_3\\
&+ \int_\Sigma d^3x \frac{\bar{N}}{\kappa\sqrt{\bar{p}}}(\delta N^i \partial_a \delta E_i^a)\mathcal{A}_4 + \int_\Sigma d^3x \frac{\bar{N}}{\kappa\sqrt{\bar{p}}}\delta N^c \partial_c(\delta_a^i \delta E_i^a)\mathcal{A}_5\\
&+ \int_\Sigma d^3x (\delta N^c \partial_c \delta N)\bar{p}^{\frac{3}{2}} V(\bar{\varphi})\mathcal{A}_6 + \int_\Sigma d^3x (\delta N^c \partial_c \delta N)\left(\frac{\bar{\pi}^2}{2\bar{p}^{\frac{3}{2}}}\right)\mathcal{A}_7\\
&+ \int_\Sigma d^3x \bar{N}\bar{p}^{\frac{3}{2}}(\delta N^c \partial_c \delta\varphi)V_{,\varphi}(\bar{\varphi})\mathcal{A}_8 + \int_\Sigma d^3x \frac{\bar{N}}{\bar{p}^{\frac{3}{2}}}(\delta N^c \partial_c \delta\pi)\bar{\pi}\mathcal{A}_9\\
&+ \int_\Sigma d^3x \frac{\bar{N}\sqrt{\bar{p}}}{2}(\delta N^i \partial_a \delta E_i^a)V(\bar{\varphi})\mathcal{A}_{10} + \int_\Sigma d^3x \frac{\bar{N}\sqrt{\bar{p}}}{2}\delta N^c \partial_c(\delta_a^i \delta E_i^a)V(\bar{\varphi})\mathcal{A}_{11}\\
&+ \int_\Sigma d^3x \frac{\bar{N}}{12\bar{p}^{\frac{5}{2}}}(\delta N^i \partial_a \delta E_i^a)\bar{\pi}^2\mathcal{A}_{12} + \int_\Sigma d^3x \frac{\bar{N}}{4\bar{p}^{\frac{5}{2}}}\delta N^c \partial_c(\delta_a^i \delta E_i^a)\bar{\pi}^2\mathcal{A}_{13},
\end{aligned}
$$

Vers une theorie consistante ?

- **Corrections** quantiques (GHC/IV) brisent la **cohérence de la théorie** !

$$\{\mathcal{C}_i, \mathcal{C}_j\} = f_{ij}^k(E, A)\mathcal{C}_k + \mathcal{A}_{ij}$$

← **Anomalies**

moins mignon d'un coup...

$$\begin{aligned}
&\{H_{tot}[N], D_{tot}[N^a]\} \\
&= -H_{tot}[\delta N^a \partial_a \delta N] + \int_\Sigma d^3x \frac{\sqrt{\bar{p}}}{\kappa}(\delta N^a \partial_a \delta N)\mathcal{A}_1 \\
&+ \int_\Sigma d^3x \frac{\sqrt{\bar{p}}}{\kappa}\bar{N}\delta N^c \partial_c(\delta_i^a \delta K_a^i)\mathcal{A}_2 + \int_\Sigma d^3x \frac{\sqrt{\bar{p}}}{\kappa}\bar{N}(\delta N^a \partial_i \delta K_a^i)\mathcal{A}_3 \\
&+ \int_\Sigma d^3x \frac{\bar{N}}{\kappa\sqrt{\bar{p}}}(\delta N^i \partial_a \delta E_i^a)\mathcal{A}_4 + \int_\Sigma d^3x \frac{\bar{N}}{\kappa\sqrt{\bar{p}}}\delta N^c \partial_c(\delta_a^i \delta E_i^a)\mathcal{A}_5 \\
&+ \int_\Sigma d^3x (\delta N^c \partial_c \delta N)\bar{p}^{\frac{3}{2}} V(\bar{\varphi})\mathcal{A}_6 + \int_\Sigma d^3x (\delta N^c \partial_c \delta N)\left(\frac{\bar{\pi}^2}{2\bar{p}^{\frac{3}{2}}}\right)\mathcal{A}_7 \\
&+ \int_\Sigma d^3x \bar{N}\bar{p}^{\frac{3}{2}}(\delta N^c \partial_c \delta\varphi)V_{,\varphi}(\bar{\varphi})\mathcal{A}_8 + \int_\Sigma d^3x \frac{\bar{N}}{\bar{p}^{\frac{3}{2}}}(\delta N^c \partial_c \delta\pi)\bar{\pi}\mathcal{A}_9 \\
&+ \int_\Sigma d^3x \frac{\bar{N}\sqrt{\bar{p}}}{2}(\delta N^i \partial_a \delta E_i^a)V(\bar{\varphi})\mathcal{A}_{10} + \int_\Sigma d^3x \frac{\bar{N}\sqrt{\bar{p}}}{2}\delta N^c \partial_c(\delta_a^i \delta E_i^a)V(\bar{\varphi})\mathcal{A}_{11} \\
&+ \int_\Sigma d^3x \frac{\bar{N}}{12\bar{p}^{\frac{5}{2}}}(\delta N^i \partial_a \delta E_i^a)\bar{\pi}^2\mathcal{A}_{12} + \int_\Sigma d^3x \frac{\bar{N}}{4\bar{p}^{\frac{5}{2}}}\delta N^c \partial_c(\delta_a^i \delta E_i^a)\bar{\pi}^2\mathcal{A}_{13},
\end{aligned}$$

- **Nécessité** d'assurer la **fermeture de l'algèbre**, deux méthodes :
  - Méthode des contre-termes : ajouter des contre-termes au niveau de l'action pour assurer la fermeture de l'algèbre,

$$\mathbb{H}_{\mathfrak{g}}^{\mathrm{HC}\,+\,\mathrm{IV}} \Rightarrow \mathcal{A}_{ij} \neq 0 \longrightarrow \mathbb{H}_{\mathfrak{g}}^{\mathrm{HC}\,+\,\mathrm{IV}} + \mathbb{H}_{\mathfrak{g}}^{\mathrm{CT}} \Rightarrow \mathcal{A}_{ij} = 0$$

← Je travaille dans ce cadre !

[Bojowald, Hossain, Kagan, Cailleteau, Barrau, Mielczarek..., 2009-Aujourd'hui]

Vers une theorie consistante ?

- **Corrections** quantiques (GHC/IV) brisent la **cohérence de la théorie** !

$$\{\mathcal{C}_i, \mathcal{C}_j\} = f_{ij}^k(E, A)\mathcal{C}_k + \mathcal{A}_{ij}$$

Anomalies

moins mignon d'un coup...

$$\begin{aligned}
&\{H_{tot}[N], D_{tot}[N^a]\} \\
&= -H_{tot}[\delta N^a \partial_a \delta N] + \int_\Sigma d^3x \frac{\sqrt{\bar{p}}}{\kappa}(\delta N^a \partial_a \delta N)\mathcal{A}_1 \\
&+ \int_\Sigma d^3x \frac{\sqrt{\bar{p}}}{\kappa}\bar{N}\delta N^c \partial_c(\delta_i^a \delta K_a^i)\mathcal{A}_2 + \int_\Sigma d^3x \frac{\sqrt{\bar{p}}}{\kappa}\bar{N}(\delta N^a \partial_i \delta K_a^i)\mathcal{A}_3 \\
&+ \int_\Sigma d^3x \frac{\bar{N}}{\kappa\sqrt{\bar{p}}}(\delta N^i \partial_a \delta E_i^a)\mathcal{A}_4 + \int_\Sigma d^3x \frac{\bar{N}}{\kappa\sqrt{\bar{p}}}\delta N^c \partial_c(\delta_a^i \delta E_i^a)\mathcal{A}_5 \\
&+ \int_\Sigma d^3x (\delta N^c \partial_c \delta N)\bar{p}^{\frac{3}{2}} V(\bar{\varphi})\mathcal{A}_6 + \int_\Sigma d^3x (\delta N^c \partial_c \delta N)\left(\frac{\bar{\pi}^2}{2\bar{p}^{\frac{3}{2}}}\right)\mathcal{A}_7 \\
&+ \int_\Sigma d^3x \bar{N}\bar{p}^{\frac{3}{2}}(\delta N^c \partial_c \delta\varphi)V_{,\varphi}(\bar{\varphi})\mathcal{A}_8 + \int_\Sigma d^3x \frac{\bar{N}}{\bar{p}^{\frac{3}{2}}}(\delta N^c \partial_c \delta\pi)\bar{\pi}\mathcal{A}_9 \\
&+ \int_\Sigma d^3x \frac{\bar{N}\sqrt{\bar{p}}}{2}(\delta N^i \partial_a \delta E_i^a)V(\bar{\varphi})\mathcal{A}_{10} + \int_\Sigma d^3x \frac{\bar{N}\sqrt{\bar{p}}}{2}\delta N^c \partial_c(\delta_a^i \delta E_i^a)V(\bar{\varphi})\mathcal{A}_{11} \\
&+ \int_\Sigma d^3x \frac{\bar{N}}{12\bar{p}^{\frac{5}{2}}}(\delta N^i \partial_a \delta E_i^a)\bar{\pi}^2\mathcal{A}_{12} + \int_\Sigma d^3x \frac{\bar{N}}{4\bar{p}^{\frac{5}{2}}}\delta N^c \partial_c(\delta_a^i \delta E_i^a)\bar{\pi}^2\mathcal{A}_{13},
\end{aligned}$$

- **Nécessité** d'assurer la **fermeture de l'algèbre**, deux méthodes :

  - **Méthode des contre-termes** : ajouter des contre-termes au niveau de l'action pour assurer la fermeture de l'algèbre,

$$\mathbb{H}_{\mathfrak{g}}^{\mathrm{HC}\,+\,\mathrm{IV}} \Rightarrow \mathcal{A}_{ij} \neq 0 \longrightarrow \mathbb{H}_{\mathfrak{g}}^{\mathrm{HC}\,+\,\mathrm{IV}} + \mathbb{H}_{\mathfrak{g}}^{\mathrm{CT}} \Rightarrow \mathcal{A}_{ij} = 0$$

Je travaille dans ce cadre !

[Bojowald, Hossain, Kagan, Cailleteau, Barrau, Mielczarek..., 2009-Aujourd'hui]

  - **Restriction sur les corrections** : restriction sur la forme de la GHC pour assurer la fermeture de l'algèbre,

$$\mathfrak{G} = \left\{ f(\mathfrak{c}, \mathfrak{p}) \,\middle|\, f(\mathfrak{c}, \mathfrak{p}) \to \mathfrak{c} \text{ à la limite classique} \right\}$$

    - Existe-t-il un sous ensemble des GHC $\mathfrak{G}_{\mathcal{A}} \subset \mathfrak{G} \Rightarrow \mathcal{A}_{ij} = 0$?

[Li, Wu 2023 & Work in progress]

GHC et perturbations cosmologiques

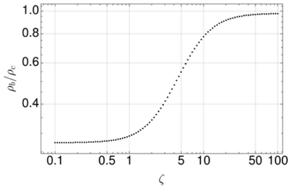
- **Clôture** de l'algèbre (via CTs) possible, et permet l'étude des **perturbations cosmologiques invariantes de jauge** ! [MDS, Martineau, Renevey, Barrau 2023]

Équation de Mukhanov-Sasaki modifiée

$$v''_{s/t} - \mathcal{G}^{(2)}(\mathfrak{c},\mathfrak{p})\nabla^2 v_{s/t} + \frac{z''_{s/t}}{z_{s/t}} v_{s/t} = 0$$

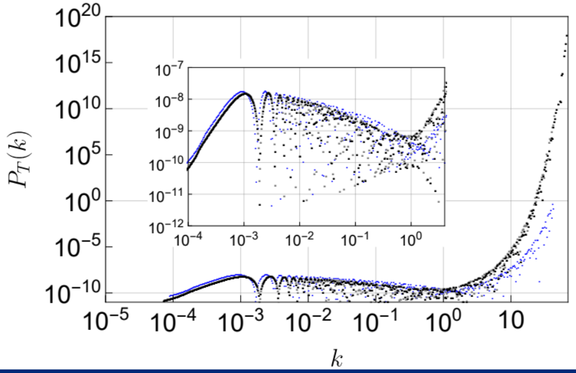
Anomalies + Clôture de l'algèbre

Densité énergie au moment du rebond



$$f_\zeta(x) = \sqrt{\frac{\zeta^2+\pi^2}{\zeta^2+4(x-\pi/2)^2}}\sin x$$

Spectre de puissance primordial



GHC et perturbations cosmologiques

- **Clôture** de l'algèbre (via CTs) possible, et permet l'étude des **perturbations cosmologiques invariantes de jauge !** [MDS, Martineau, Renevey, Barrau 2023]

Équation de Mukhanov-Sasaki modifiée

$$v''_{s/t} - \mathcal{G}^{(2)}(\mathfrak{c},\mathfrak{p})\nabla^2 v_{s/t} + \frac{z''_{s/t}}{z_{s/t}} v_{s/t} = 0$$

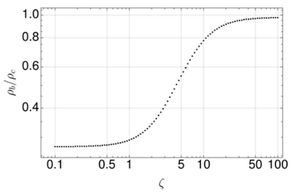
Anomalies + Clôture de l'algèbre

Temps (-1) — Temps ou espace ! ($\operatorname{sgn}\mathcal{G}^{(2)}$)

$$\eta_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{pmatrix} \mathcal{G}^{(2)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

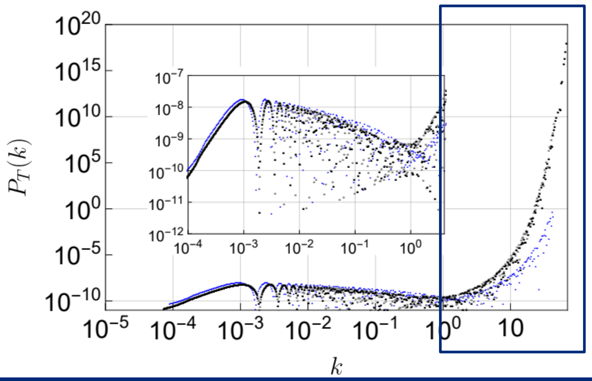
Espace (+1) — Espace (+1)

Densité énergie au moment du rebond



$$f_\zeta(x) = \sqrt{\frac{\zeta^2+\pi^2}{\zeta^2+4(x-\pi/2)^2}}\sin x$$

Spectre de puissance primordial



Phase euclidienne

$$\{\mathbb{H}_{\text{tot}}, \mathbb{H}_{\text{tot}}\} = \mathcal{G}^{(2)}(\mathfrak{c},\mathfrak{p})\mathbb{D}_{\text{tot}}$$

GHC et perturbations cosmologiques

▶ **Clôture** de l'algèbre (via CTs) possible, et permet l'étude des **perturbations cosmologiques invariantes de jauge** ! [MDS, Martineau, Renevey, Barrau 2023]

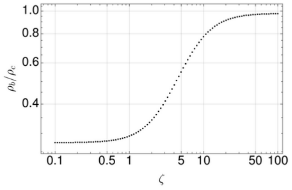
Équation de Mukhanov-Sasaki modifiée

$$v''_{s/t} - \mathcal{G}^{(2)}(\mathfrak{c},\mathfrak{p})\nabla^2 v_{s/t} + \frac{z''_{s/t}}{z_{s/t}} v_{s/t} = 0$$

Anomalies + Clôture de l'algèbre

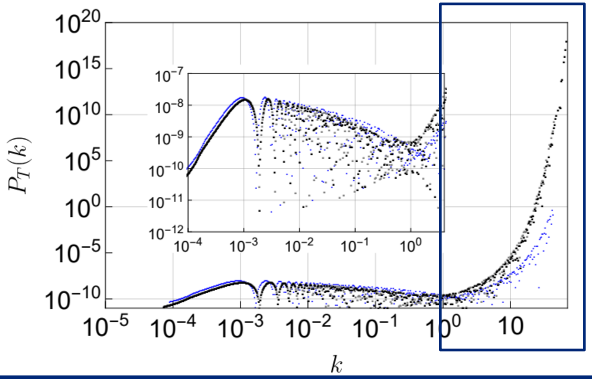
$$\eta_{\mu\nu} = \begin{array}{c} \text{Temps (-1)} \\ \begin{pmatrix} \boxed{-1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ \text{Espace (+1)} \end{array} \Longrightarrow \begin{array}{c} \text{Temps ou espace ! } (\operatorname{sgn}\mathcal{G}^{(2)}) \\ \begin{pmatrix} \boxed{\mathcal{G}^{(2)}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ \text{Espace (+1)} \end{array}$$

Densité énergie au moment du rebond



$$f_\zeta(x) = \sqrt{\frac{\zeta^2+\pi^2}{\zeta^2+4(x-\pi/2)^2}}\sin x$$

Spectre de puissance primordial



$\Longrightarrow$ Effets des GHC faible sur les observables cosmologiques

$\Longrightarrow$ **La phase euclidienne est maintenue avec les GHC !**

Phase euclidienne

$$\{\mathbb{H}_{\text{tot}}, \mathbb{H}_{\text{tot}}\} = \mathcal{G}^{(2)}(\mathfrak{c},\mathfrak{p})\mathbb{D}_{\text{tot}}$$

Les conclusions de la LQC « usuelle » sont maintenus malgré les ambiguites liées à la construction de la correction d'holonomie !

Cas générique : IV + GHC, fermeture de l'algèbre et restriction ?

- **Modèle exclu** ou peut-on **échapper au changement de signature** liée aux (G)HC sans hypothèses exotiques ?

[MDS, Martineau, Barrau - Work in progress]

  - La réponse semble être positive : au moins dans le cas de HC usuelle, en considérant le modèle complet IV + HC. **Toujours vrai avec GHC ?**
    [Cailleteau, Linsefors, Barrau]

    Calcul très fastidieux avec ~60 anomalies : **en plus de l'analyse physique, nous développons un code générique pour dériver l'algèbre des contraintes et ses (potentielles) anomalies.**

  - Beaucoup de questions dont auxquelles nous espérons répondre dans un futur proche :

    $\Rightarrow$ Allons-nous imposer des restrictions sur la forme des corrections afin d'assurer la consistance de la théorie ?

    $\Rightarrow$ Quel(s) lien(s) entre ces nouvelles restrictions et les ambiguités de construction ?

    $\Rightarrow$ Destin du changement de signature ?

    $\Rightarrow$ Conséquences phénoménologique ? En accord avec le CMB ou le modèle est-il exclu ?

« It's very unfortunate that one thinks of the beginning whereas in fact, we have no good theory of such a thing as the beginning. »

-

Peebles

Questions ?