



Le modèle à 2 doublets de Higgs dans un formalisme invariant de jauge

Thomas Guérandel

sous la direction d'Ingo Schienbein

13 avril 2026, séminaire doctorant LPSC

1. Contexte historique
2. Introduction au 2HDM et formalisme bilinéaire
3. Potentiel effectif
4. Mécanisme de Gildener-Weinberg
5. Conclusion et perspectives

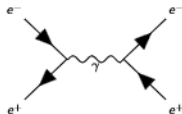
Plan

1. Contexte historique
2. Introduction au 2HDM et formalisme bilinéaire
3. Potentiel effectif
4. Mécanisme de Gildener-Weinberg
5. Conclusion et perspectives

La physique des particules avant les années 60

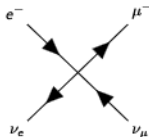
Electrodynamique quantique

- Version quantique de l'électromagnétisme
- Théorie de jauge $U(1)$
- Photon sans masse
- Portée infinie
- Renormalisable



Théorie de Fermi

- Décrit l'interaction faible
- Théorie effective
- Sans médiateurs
- Portée limitée
- Valide à basse énergie



⇒ On veut décrire l'interaction faible à l'aide d'une théorie de jauge

Théorie de jauge

Symétrie globale

- Transformation identique en tout point : $\psi(x) \rightarrow e^{i\alpha}\psi(x)$
- Phase constante $\alpha \Rightarrow$ OK

Symétrie locale (théorie de jauge)

- Transformation dépend de x : $\psi(x) \rightarrow e^{i\alpha(x)}\psi(x)$
- Phase locale $\alpha(x) \Rightarrow$ impossible de comparer $\psi(x)$ et $\psi(y)$

\Rightarrow

On introduit un boson de jauge qui permet de comparer les phases en différents points. C'est le médiateur de l'interaction.

Le problème de $SU(2)$



Solution naïve : imposer une masse artificielle aux médiateurs mais cela :

- brise l'invariance de jauge
- donne une théorie non renormalisable

On a besoin d'un mécanisme qui

- préserve l'invariance de jauge
- donne une masse aux médiateurs
- conserve la renormalisabilité

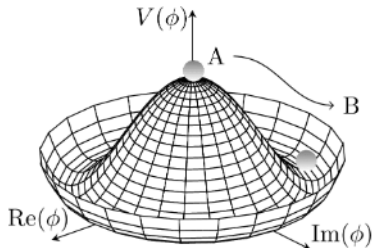
Introduction d'un doublet de Higgs

On introduit un scalaire

$$\phi = \begin{pmatrix} \phi^+ \\ \phi^0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \pi^1 + i\sigma^1 \\ \pi^2 + i\sigma^2 \end{pmatrix}$$

avec le potentiel

$$V(\phi) = -\mu^2 \phi^\dagger \phi + \lambda (\phi^\dagger \phi)^2$$



"Brisure spontanée de symétrie" :

- $\langle |\phi| \rangle = v \neq 0$
- 3 ddl \rightarrow masse des 3 médiateurs
- 1 ddl \rightarrow boson de Higgs

$$\phi \rightarrow \begin{pmatrix} G^+ \\ v + h + G^0 \end{pmatrix}$$

Et ensuite ?

Succès expérimental

Boson de Higgs observé au LHC en 2012

⇒ validation du mécanisme de Higgs

Cependant, on a

- une théorie incomplète
 - matière noire
 - masses des neutrinos
 - origine de la violation CP
- des problèmes théoriques
 - problème de hiérarchie
 - naturalité
 - peu de contraintes expérimentales

Extensions du
modèle standard

Plan

1. Contexte historique
- 2. Introduction au 2HDM et formalisme bilinéaire**
3. Potentiel effectif
4. Mécanisme de Gildener-Weinberg
5. Conclusion et perspectives

Le modèle à 2 doublets de Higgs

On considère désormais un second doublet de Higgs :

$$\varphi_1 = \begin{pmatrix} \varphi_1^+ \\ \varphi_1^0 \\ \varphi_1^- \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \pi_1^1 + i\sigma_1^1 \\ \pi_1^2 + i\sigma_1^2 \\ \pi_1^3 + i\sigma_1^3 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \varphi_2 = \begin{pmatrix} \varphi_2^+ \\ \varphi_2^0 \\ \varphi_2^- \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \pi_2^1 + i\sigma_2^1 \\ \pi_2^2 + i\sigma_2^2 \\ \pi_2^3 + i\sigma_2^3 \end{pmatrix}$$

- 8 composantes :
 - 3 bosons de Goldstone : G^0 et G^\pm
 - 3 scalaires neutres : h_1 , h_2 et h_3
 - 2 scalaires chargés : H^\pm
- Phénoménologie riche (14 paramètres) :
 - source de violation CP
 - candidat à la matière noire
 - propice à de nouveau mécanisme de brisure
 - nécessaire pour la supersymétrie, l'axion et d'autres

Invariance de jauge

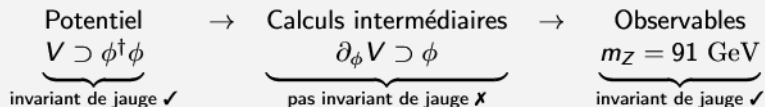
Avec la transformation U :

$$\phi \rightarrow U\phi$$

le terme $\phi^\dagger\phi$ est invariant de jauge :

$$\phi^\dagger\phi \rightarrow (U\phi)^\dagger U\phi = \phi^\dagger U^\dagger U\phi = \phi^\dagger\phi$$

Formalisme usuel



Formalisme bilinéaire/invariant de jauge

Définition des bilinéaires

$$K_0 = \varphi_1^\dagger \varphi_1 + \varphi_2^\dagger \varphi_2$$

$$K_1 = \varphi_1^\dagger \varphi_2 + \varphi_2^\dagger \varphi_1$$

$$K_2 = i(\varphi_2^\dagger \varphi_1 - \varphi_1^\dagger \varphi_2)$$

$$K_3 = \varphi_1^\dagger \varphi_1 - \varphi_2^\dagger \varphi_2$$

φ_1 et φ_2 dépendent du choix de jauge :

- ▶ symétries cachées
- ▶ calculs difficiles

Formalisme bilinéaire

$$V = \tilde{K}^T \tilde{\xi} + \tilde{K}^T \tilde{E} \tilde{K}$$

Formalisme usuel

$$V = m_{11}^2(\varphi_1^\dagger \varphi_1) + m_{22}^2(\varphi_2^\dagger \varphi_2) - [m_{12}^2(\varphi_1^\dagger \varphi_2) + \text{h.c.}]$$

$$+ \frac{1}{2} \lambda_1 (\varphi_1^\dagger \varphi_1)^2 + \frac{1}{2} \lambda_2 (\varphi_2^\dagger \varphi_2)^2 + \lambda_3 (\varphi_1^\dagger \varphi_1)(\varphi_2^\dagger \varphi_2) + \lambda_4 (\varphi_1^\dagger \varphi_2)(\varphi_2^\dagger \varphi_1)$$

$$+ \frac{1}{2} [\lambda_5 (\varphi_1^\dagger \varphi_2)^2 + \text{h.c.}] + [\lambda_6 (\varphi_1^\dagger \varphi_1)(\varphi_1^\dagger \varphi_2) + \lambda_7 (\varphi_2^\dagger \varphi_2)(\varphi_1^\dagger \varphi_2) + \text{h.c.}]$$

Pourquoi le formalisme bilinéaire ?

Formalisme bilinéaire

- Classification des symétries
- Invariance de jauge préservée
- Interprétation géométrique du potentiel et du minimum
- Analyse de la stabilité
- Analyse du groupe de renormalisation

Formalisme usuel

- Intuition sur les champs
- Approprié pour les outils numériques
- Secteur fermionique
- Moins abstrait/approche historique

Plan

1. Contexte historique
2. Introduction au 2HDM et formalisme bilinéaire
- 3. Potentiel effectif**
4. Mécanisme de Gildener-Weinberg
5. Conclusion et perspectives

Expansion perturbative du potentiel

Potentiel effectif

$$V_{\text{eff}} = V_{\text{arbre}} + V_{1\text{-boucle}} + V_{2\text{-boucle}} + \dots$$

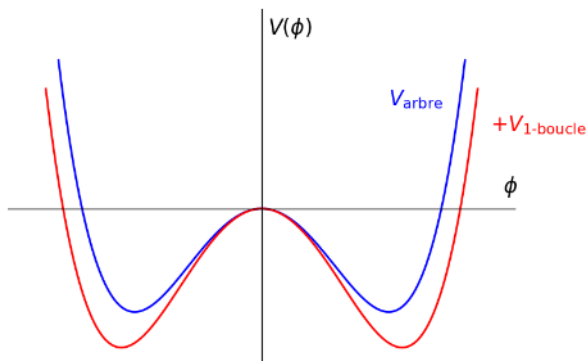
$$\begin{array}{l}
 V_{\text{eff}} = X \\
 + \text{diagramme 1} + \text{diagramme 2} + \text{diagramme 3} + \dots \\
 + \text{diagramme 4} + \text{diagramme 5} + \text{diagramme 6} + \dots \\
 + \dots
 \end{array}
 \left. \begin{array}{l} \\ \\ \\ \\ \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{arbre} \\ 1\text{-boucle} \\ 2\text{-boucle} \\ \end{array}$$

Correction à une boucle

En pratique, on utilise

$$V_{1\text{-boucle}}(\tilde{\mathbf{K}}, \mu) = \frac{1}{256\pi^2} \sum_i n_i m_i^4(\tilde{\mathbf{K}}) \left[\ln \left(\frac{m_i^2(\tilde{\mathbf{K}})}{\mu^2} \right) - c_i \right]$$

Exemple avec le modèle standard :



Résultats

On suppose que

$$\tilde{K}_{\text{eff}} = \tilde{K}_{\text{arbre}} + \tilde{K}_{\text{1-boucle}}$$

► Expression invariante de jauge pour la correction sur le minimum du potentiel et la masse des scalaires avec

$$m_{\text{eff}}^2 = m_{\text{arbre}}^2 + m_{\text{1-boucle}}^2 \quad \text{et} \quad \tilde{K}_{\text{eff}} = \tilde{K}_{\text{arbre}} + \tilde{K}_{\text{1-boucle}}$$

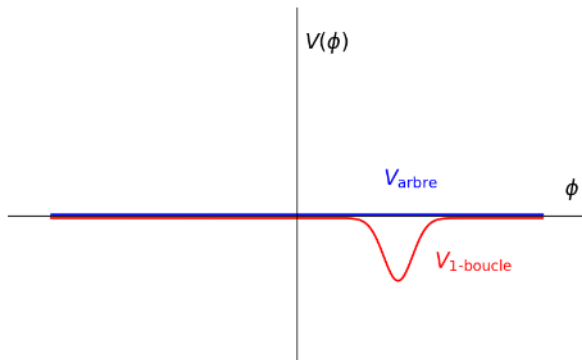
► "The Two-Higgs Doublet Model beyond tree-level : A gauge-invariant formalism" 2505.12564 [hep-ph] avec Markos Maniatis, Lohan Sartore et Ingo Schienbein

Plan

1. Contexte historique
2. Introduction au 2HDM et formalisme bilinéaire
3. Potentiel effectif
- 4. Mécanisme de Gildener-Weinberg**
5. Conclusion et perspectives

Le principe

- Potentiel à l'arbre invariant d'échelle
- Brisure spontanée radiative
- Échelle générée dynamiquement



En pratique

- On considère un potentiel invariant d'échelle

$$V = \cancel{\tilde{\mathbf{K}}^T \xi} + \tilde{\mathbf{K}}^T \tilde{\mathbf{E}} \tilde{\mathbf{K}} = \tilde{\mathbf{K}}^T \tilde{\mathbf{E}} \tilde{\mathbf{K}}$$

- On trouve une direction $\tilde{\mathbf{K}}_*$ telle que

$$V = \tilde{\mathbf{K}}_*^T \tilde{\mathbf{E}} \tilde{\mathbf{K}}_* = 0$$

- On cherche le minimum avec le potentiel effectif dans cette direction

$$\partial_\mu V_{\text{eff}}|_{\tilde{\mathbf{K}}_*} = 0$$

Résultats/objectifs

- ▶ Classification des réalisations du mécanisme
- ▶ Contraintes théoriques
 - Stabilité
 - Unitarité
 - Perturbativité
- ▶ Contraintes expérimentales
 - Masse des scalaires
 - Paramètres obliques STU
 - Autres observables..

Plan

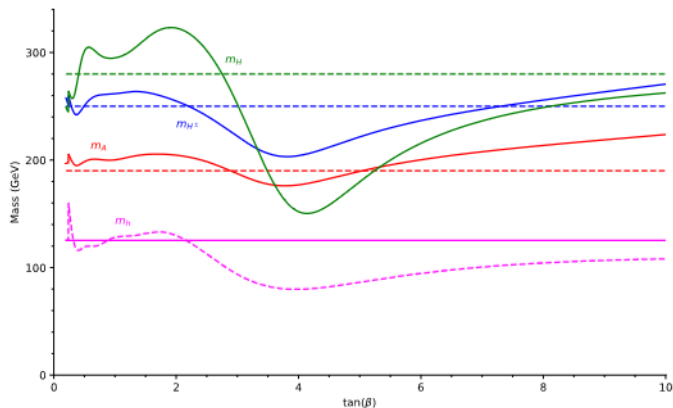
1. Contexte historique
2. Introduction au 2HDM et formalisme bilinéaire
3. Potentiel effectif
4. Mécanisme de Gildener-Weinberg
5. Conclusion et perspectives

Conclusion et perspectives

- Le secteur scalaire c'est cool
- Le formalisme bilinéaire est pertinent pour étudier le potentiel d'extensions scalaires
- Expressions invariantes de jauge pour les corrections à une boucle
- Perspectives :
 - ▶ Contraindre les réalisations du mécanisme de Gildener-Weinberg
 - ▶ Étudier la compatibilité/lien entre le mécanisme de Gildener-Weinberg et le principe des points multiples
 - ▶ Utiliser les résultats des corrections à une boucle pour une autre étude phénoménologique

ANNEXES

Example of corrected masses (CP conserved type I case)



One-loop corrections to scalar masses, dashed lines are tree-level masses.

Gauge-invariant bilinears

We construct 4 real gauge-invariant bilinears

$$\begin{aligned}
 K_0 &= \varphi_1^\dagger \varphi_1 + \varphi_2^\dagger \varphi_2, & K_1 &= \varphi_1^\dagger \varphi_2 + \varphi_2^\dagger \varphi_1, \\
 K_2 &= i(\varphi_2^\dagger \varphi_1 - \varphi_1^\dagger \varphi_2), & K_3 &= \varphi_1^\dagger \varphi_1 - \varphi_2^\dagger \varphi_2
 \end{aligned}$$

with a one-to-one correspondence between the K 's and the physical d.o.f.

We can define our new parameters as

$$\begin{aligned}
 \xi_0 &= \frac{1}{2} (m_{11}^2 + m_{22}^2), & \boldsymbol{\xi} = (\xi_a) &= \frac{1}{2} (-2\text{Re}(m_{12}^2), 2\text{Im}(m_{12}^2), m_{11}^2 - m_{22}^2)^\top, \\
 \eta_{00} &= \frac{1}{4} \left(\frac{1}{2}(\lambda_1 + \lambda_2) + \lambda_3 \right), & \boldsymbol{\eta} = (\eta_a) &= \frac{1}{4} \left(\text{Re}(\lambda_6 + \lambda_7), -\text{Im}(\lambda_6 + \lambda_7), \frac{1}{2}(\lambda_1 - \lambda_2) \right)^\top, \\
 \mathbf{E} = (E_{ab}) &= \frac{1}{4} \begin{pmatrix} \lambda_4 + \text{Re}(\lambda_5) & -\text{Im}(\lambda_5) & \text{Re}(\lambda_6 - \lambda_7) \\ -\text{Im}(\lambda_5) & \lambda_4 - \text{Re}(\lambda_5) & -\text{Im}(\lambda_6 - \lambda_7) \\ \text{Re}(\lambda_6 - \lambda_7) & -\text{Im}(\lambda_6 - \lambda_7) & \frac{1}{2}(\lambda_1 + \lambda_2) - \lambda_3 \end{pmatrix}.
 \end{aligned}$$

THDM potential in bilinears

The tree-level potential is then given as

$$V^{(0)}(\tilde{\mathbf{K}}) = K_0 \xi_0 + K_a \xi_a + K_0^2 \eta_{00} + 2K_0 K_a \eta_a + K_a K_b E_{ab}$$

One can combine the bilinears and parameters as

$$\tilde{\mathbf{K}} = \begin{pmatrix} K_0 \\ \mathbf{K} \end{pmatrix}, \quad \tilde{\boldsymbol{\xi}} = \begin{pmatrix} \xi_0 \\ \boldsymbol{\xi} \end{pmatrix}, \quad \tilde{\mathbf{E}} = \begin{pmatrix} \eta_{00} & \boldsymbol{\eta}^T \\ \boldsymbol{\eta} & \mathbf{E} \end{pmatrix},$$

so that the potential is written

$$V^{(0)}(\tilde{\mathbf{K}}) = \tilde{\mathbf{K}}^T \tilde{\boldsymbol{\xi}} + \tilde{\mathbf{K}}^T \tilde{\mathbf{E}} \tilde{\mathbf{K}}$$

- Conditions : $K_0 \geq 0$ & $K_0^2 \geq \mathbf{K}^2$

Vacuum structure

- Unbroken electroweak symmetry if $K_0 = 0$

$$K_0 = 0$$

- Charge-breaking minimum if $K_0^2 > \mathbf{K}^2$

$$K_0 > 0 \quad \& \quad K_0^2 > \mathbf{K}^2 \quad \& \quad \frac{\partial V}{\partial K^\mu} \equiv \partial_\mu V = 0$$

Charge-conserving minimum (\equiv SM EWSB)

$$K_0 > 0 \quad \& \quad K_0^2 = \mathbf{K}^2 \quad \& \quad \partial_\mu V = 2u \left(\tilde{g} \tilde{\mathbf{K}} \right)_\mu$$

with u the Lagrange multiplier and $\tilde{g} = \text{diag}(1, -1_3)$

Mass expressions

- We need a connection between the physical scalars and the bilinears

We define $\phi^i := (\pi_1^1, \pi_1^2, \sigma_1^1, \sigma_1^2, \pi_2^1, \pi_2^2, \sigma_2^1, \sigma_2^2)^\top$ recalling that

$$\varphi_1 = \begin{pmatrix} \varphi_1^+ \\ \varphi_1^0 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \pi_1^1 + i\sigma_1^1 \\ \pi_1^2 + i\sigma_1^2 \end{pmatrix}, \quad \varphi_2 = \begin{pmatrix} \varphi_2^+ \\ \varphi_2^0 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \pi_2^1 + i\sigma_2^1 \\ \pi_2^2 + i\sigma_2^2 \end{pmatrix}$$

and $K^\mu = (K_0, K_1, K_2, K_3)^\top$

Bilinears/scalar components connection

$$K^\mu := \frac{1}{2} \Delta_{ij}^\mu \phi^i \phi^j \quad \text{and} \quad \Gamma_i^\mu := \frac{\partial K^\mu}{\partial \phi^i} = \partial_i K^\mu = \Delta_{ij}^\mu \phi^j$$

Mass expressions

The scalar masses are obtained from

$$(M_S^2)_{ij} = \partial_i \partial_j V$$

The analogous expression with bilinear is

$$(\mathcal{M}^2)_{\mu\nu} = \partial_\mu \partial_\nu V$$

Therefore we can write

$$(M_S^2)_{ij} = \partial_i \left(\Gamma_j^\mu \partial_\nu V \right) = \Delta_{ij}^\mu \partial_\mu V + \Gamma_i^\mu \Gamma_j^\nu \partial_\mu \partial_\nu V$$

or simply

$$M_S^2 = \Delta^\mu \partial_\mu V + \Gamma \mathcal{M} \Gamma^\top$$

Mass expressions

In fact we are really interested in the diagonal congruent matrix of

$$M_S^2 = \Delta^\mu \partial_\mu V + \Gamma \mathcal{M} \Gamma^\top = 2u \left(\tilde{g} \tilde{\mathbf{K}} \right)_\mu \Delta^\mu + \Gamma \mathcal{M} \Gamma^\top$$

It's useful to define the canonical basis such that

$$\hat{\Gamma} = U_c \Gamma = \begin{pmatrix} 0_{5 \times 4} \\ \gamma_{3 \times 4} \end{pmatrix} \implies \hat{\Gamma} \mathcal{M} \hat{\Gamma}^\top = \begin{pmatrix} 0_{5 \times 5} & 0_{5 \times 3} \\ 0_{3 \times 5} & \gamma \mathcal{M} \gamma^\top \end{pmatrix}$$

and thus we have

$$\widehat{M}_S^2 = U_c M_S^2 U_c^\top = \begin{pmatrix} 0_{3 \times 3} & & \\ & \widehat{M}_{\text{charged}}^2 & \\ & & \widehat{M}_{\text{neutral}}^2 \end{pmatrix}$$

- Gauge-invariant formalism leads to clear separation of massive scalars and Goldstone bosons

Mass expressions

Finally we can obtain the complete diagonal form with

$$\overline{M}_\xi^2 = \bar{U} \widehat{M}_\xi^2 \bar{U}^T \quad \text{where} \quad \bar{U} = \text{diag} (1, R'_{3 \times 3}, 1, R_{3 \times 3})$$

We define

$$\bar{K} = RK, \quad \bar{\xi} = R\xi, \quad \bar{\eta} = R\eta, \quad \bar{E} = RER^T, \quad k_a = \frac{K_a}{K_0}$$

Gauge-invariant mass expressions (CC case)

- Charged sector : $m_{H^\pm}^2 = 4uK_0$ for any potential (\equiv at all orders)
- Neutral sector : $m_a^2 = 4K_0 [(\eta_{00} - u) \bar{k}_a^2 + 2\bar{\eta}_a \bar{k}_a + \bar{E}_{aa} + u]$

Effective potential in terms of bilinears

Quantum corrections modify the potential as

$$V_{\text{eff}}(\tilde{\mathbf{K}}) = V^{(0)}(\tilde{\mathbf{K}}) + \kappa V^{(1)}(\tilde{\mathbf{K}}, \mu) + \dots$$

with

$$\tilde{\mathbf{K}} = \tilde{\mathbf{K}}^{(0)} + \kappa \tilde{\mathbf{K}}^{(1)} + \dots$$

The Coleman-Weinberg one-loop correction is given by

$$V_1(\tilde{\mathbf{K}}, \mu) = \frac{1}{4} \sum_i n_i m_i^4(\tilde{\mathbf{K}}) \left[\ln \left(\frac{m_i^2(\tilde{\mathbf{K}})}{\mu^2} \right) - c_i \right]$$

where

$$n_i = (-1)^{2s_i} (2s_i + 1) \implies n_s = 1, \quad n_f = -2, \quad n_g = 3$$

$$\overline{\text{MS}} \text{ scheme} \implies c_s = \frac{3}{2}, \quad c_f = \frac{3}{2}, \quad c_g = \frac{5}{6}$$

Motivations

- The gauge-invariance is preserved at each order in the expansion
- Precise predictions for mass and vacuum position with
 - ▶ $m = m^{(0)} + \kappa m^{(1)}$
 - ▶ $\tilde{K} = \tilde{K}^{(0)} + \kappa \tilde{K}^{(1)}$
 - ▶ $u = u^{(0)} + \kappa u^{(1)}$
- Study potential stability, vacuum structure and new possible phenomenology at loop-level ?

Vacuum structure

The minimization of the potential requires

$$\begin{aligned}
 \partial_\alpha V(\tilde{\mathbf{K}}) &= 2u(\tilde{\mathbf{g}}\tilde{\mathbf{K}})_\alpha \\
 &= 2u^{(0)}(\tilde{\mathbf{g}}\tilde{\mathbf{K}}^{(0)})_\alpha + \kappa \left[2u^{(0)}(\tilde{\mathbf{g}}\tilde{\mathbf{K}}^{(1)})_\alpha + 2u^{(1)}(\tilde{\mathbf{g}}\tilde{\mathbf{K}}^{(0)})_\alpha \right] + \dots \\
 &= \partial_\alpha V^{(0)} + \kappa \left[\partial_\alpha V^{(1)} + K_\mu^{(1)} \partial_\mu \partial_\alpha V^{(0)} \right] + \dots
 \end{aligned}$$

Therefore we have the relations :

$$2u^{(1)}(\tilde{\mathbf{g}}\tilde{\mathbf{K}}^{(0)})_\alpha = \partial_\alpha V^{(1)} + (\mathcal{M}^{(0)} - 2u^{(0)}\tilde{\mathbf{g}})^{\alpha\mu} K_\mu^{(1)}$$

$$\tilde{\mathbf{K}}^\top \tilde{\mathbf{g}} \tilde{\mathbf{K}} = 0 \quad \implies \quad 2\tilde{\mathbf{K}}^{(0)\top} \tilde{\mathbf{g}} \tilde{\mathbf{K}}^{(1)} = 0$$

Effective minimum and masses

We can define

$$D^a := \gamma^{a\mu} \partial_\mu$$

Finally, we obtain

$$\begin{aligned} \bar{K}_a^{(1)} &= - \frac{\sqrt{2K_0^{(0)}} \bar{D}_a V^{(1)}}{m_a^{2(0)}} \\ u^{(1)} &= \frac{1}{4K_0^{(0)}} \left[2 \partial_0 V^{(1)} + \frac{1}{2} \mathbf{f}_\pm^T \mathbf{k}^{(1)} \right] \\ (m_a^2)^{(1)} &= \bar{D}_a \bar{D}_a V^{(1)} + \frac{K_0^{(1)}}{K_0^{(0)}} (m_a^2)^{(0)} + \bar{f}_\pm^a \bar{\delta}^{(1)}, \quad a \end{aligned}$$

with $\mathbf{f}_\pm = 8K_0^{(0)} [(\eta_{00} - u^{(0)}) \mathbf{k}^{(0)} + \boldsymbol{\eta}]$, $\mathbf{k}^{(1)} = \frac{\mathbf{K}^{(1)}}{K_0^{(0)}}$ and $\bar{\delta}^{(1)} = \bar{\mathbf{k}}^{(1)} - \frac{K_0^{(1)}}{K_0^{(0)}} \bar{\mathbf{k}}^{(0)}$.

Derivatives

We have

$$\begin{aligned} \partial_\mu V_i^{(1)} &= \frac{n_i}{2} \sum_{l=1}^N \left(\overline{\partial_\mu M^2} \right)^{ll} A_i(\lambda_l) \\ \partial_\mu \partial_\nu V_i^{(1)} &= \frac{n_i}{2} \left[\sum_{l=1}^N \left(\overline{\partial_\mu \partial_\nu M^2} \right)^{ll} A_i(\lambda_l) \right. \\ &\quad \left. + \sum_{l=1}^N \sum_{j=1}^N \left(\overline{\partial_\mu M^2} \right)^{lj} \left(\overline{\partial_\nu M^2} \right)^{jl} B_i(\lambda_l, \lambda_j) \right] \end{aligned}$$

where the functions A_i and B_i are given by

$$\begin{aligned} A_s(x) = A_f(x) &\equiv A(x) = x \left[\log \left(\frac{x}{\mu^2} \right) - 1 \right], & A_g(x) &= x \left[\log \left(\frac{x}{\mu^2} \right) - \frac{1}{3} \right], \\ B_s(x, y) = B_f(x, y) &\equiv B(x, y) = \frac{A(x) - A(y)}{x - y}, & B_g(x, y) &= \frac{A_g(x) - A_g(y)}{x - y}, \\ B(x, x) &= \frac{dA}{dx}(x) = \log \left(\frac{x}{\mu^2} \right), & B_g(x, x) &= \frac{dA_g}{dx}(x) = \log \left(\frac{x}{\mu^2} \right) + \frac{2}{3} \end{aligned}$$

Derivatives

Recalling that

$$V_1(\tilde{\mathbf{K}}, \mu) = \frac{1}{4} \sum_i n_i m_i^4(\tilde{\mathbf{K}}) \left[\ln \left(\frac{m_i^2(\tilde{\mathbf{K}})}{\mu^2} \right) - c_i \right]$$

We obtain

$$\partial_\mu V_i^{(1)} = \frac{n_i}{2} \sum_{l=1}^N \left(\overline{\partial_\mu M^2} \right)'' A_i(\lambda_l)$$

where A_i are one-loop tadpole functions.

- We need to obtain bilinear derivatives of all masses.

Example : gauge contribution

Gauge masses are given from

$$M_W^2 = \frac{1}{2} K_0 (g_+^2 - g_-^2), \quad M_{Z,\gamma}^2 = \frac{1}{2} \left[K_0 g_+^2 \pm \sqrt{g_+^4 K^2 + (K_0^2 - K^2) g_-^4} \right]$$

Therefore we have

$$\partial_\mu V_g^{(1)} = \frac{3}{2} \left\{ 2g_{\mu WW} A_g (M_W^2) + g_{\mu ZZ} A_g (M_Z^2) \right\}$$

$$g_{\mu WW} = \frac{M_W^2}{K_0} \delta^{\mu 0}, \quad g_{\mu ZZ} = \frac{M_Z^2}{2K_0^2} \left[K^\mu + \cos^2(2\theta_W) (\tilde{g} \tilde{K})^\mu \right]$$

And in the good basis

$$\bar{D}_a V_g^{(1)} = \frac{3}{2} \left\{ 2\bar{g}_{aWW} A_g (M_W^2) + \bar{g}_{aZZ} A_g (M_Z^2) \right\}$$

$$\bar{g}_{iAB} = \bar{\Gamma}_i^\mu g_{\mu AB} \implies \bar{g}_{aWW} = \sqrt{\frac{2}{K_0}} M_W^2 \bar{k}^a \text{ and } \bar{g}_{aZZ} = \sqrt{\frac{2}{K_0}} M_Z^2 \bar{k}^a$$